第4章　微分積分

4.1　多項式と多項式関数

4.1.1　多項式

微分積分に入る前に、基本的な関数として多項式と多項式関数について学びます。ここで学ぶ多項式は、変数が一つだけの多胡式、$2x+3$ とか、$-3x^3+5x-2$ などです。x と y を変数とする、$2xy-x^2+3$ のようなものも多項式と呼びますが、ここでは扱いません。まず、多項式とその次数の定義をします。

定義 4.1.1 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ を数とする時、文字 x を含む式、

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

を（x に関する）多項式という。$c_n \neq 0$ のとき、$f(x)$ を 次数 n の多項式といい、$\deg f(x) = n$ と書く。x に数を代入して、$f(x)$ の値を考える場合は、$f(x)$ を多項式関数という。$\deg 0 = -\infty$ と約束する。

数を与えると、その値が決まる対応を、関数と言います。多項式関数はその一つです。多項式 $f(x)$ の x に数を代入すると、ある数が決まりますが、$c_0, c_1, \ldots, c_n$ はすでに決まった数ですから、これと、今代入した数のかけ算と足し算、または引き算だけで、その値を計算することができます。あとで、指数関数や、対数関数などについても学びますが、引き算は、負の数を足すと考えれば、和と積だけで、計算できる、簡単な関数です。すべての関数を、多項式で表すことはできませんが、値を多項式をつかって近似（近い値を求める）することはできます。

多項式に関しては、次の定理が基本的です。

定理 4.1.1 $f(x)$ を多項式とする。このとき、以下が成立する。

(1) $g(x)$ も多項式とすると、$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$。

(2) $g(x) \neq 0$ ならば、多項式 $q(x)$, $r(x)$ で

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg g(x)$$

となるものが存在する。

(3) $f(a)=0$ ならば 多項式 $g(x)$ で $f(x)=(x-a)g(x)$ をみたすものが存在する。

(3) $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を相異なる数とする。$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_m)=0$ ならば多項式 $g(x)$ で

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)g(x),\ \deg g(x)=\deg f(x)-m$$

をみたすものが存在する。

4.1.2　組み立て除法

$f(x)$ を n 次の多項式とし、$g(x)=x-a$ とすると、Theorem 4.1.1 (2) より

$$f(x)=q(x)(x-a)+r(x),\quad \deg(r(x))<\deg(g(x))=\deg(x-a)=1.$$

となる多項式、$q(x)$ と $r(x)$ が存在する。ここで、$\deg(r(x))<1$ だから、$r(x)$ は定数である。そこで、$r(x)=r$ と書く。すなわち、$f(x)=q(x)(x-a)+r$。ここで $q(x)$ と r を求める方法の一つである組み立て除法 (sythetic division) を解説する。

まず、$f(x)$ が定数 f のときは、$q(x)=0, r=f$ とおけば、$f(x)=q(x)(x-a)+r$ は成立するから $\deg(f(x))$ は 1 以上とする。 すると、$f(x)-r=q(x)(x-a)$ の左辺は $f(x)$ の次数と等しいから n、右辺は、Theorem 4.1.1 (1) を用いると、$\deg(q(x))+\deg(x-a)$ だから、

$$n=\deg(f(x))=\deg(f(x)-r)=\deg(q(x)(x-a))=\deg(q(x))+\deg(x-a)=\deg(q(x))+1.$$

すなわち $\deg(q(x))=n-1$。そこで $f(x)$ と, $q(x)$ を次のようにおく。

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0 \\ q(x) &=& b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0. \end{array}$$

すると、

$$\begin{array}{rcl} f(x)-r &=& c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\cdots+c_1x+(c_0-r) \\ q(x)(x-a) &=& (b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)(x-a) \\ &=& b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-b_{n-1}a)x^{n-1}+(b_{n-3}-b_{n-2}a)x^{n-2}+\cdots \\ && +(b_0-b_1a)x+(-b_0a) \end{array}$$

だから、$f(x)-r=q(x)(x-a)$ の両辺の x^n, $x^{n-1}, \ldots, x$ の係数と 定数項 (x^0 の係数) を比べると、

$$c_n=b_{n-1},\ c_{n-1}=b_{n-2}-b_{n-1}a,\ c_{n-2}=b_{n-3}-b_{n-2}a,\ \ldots,\ c_1=b_0-b_1a,\ c_0-r=-b_0a$$

したがって、

$$b_{n-1}=c_n,\ b_{n-2}=c_{n-1}+b_{n-1}a,\ b_{n-3}=c_{n-2}+b_{n-2}a,\ \ldots, b_0=c_1+b_1a,\ r=c_0+b_0a$$

である。すなわち、$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$ と r を求めるには、まず b_{n-1} は c_n ($f(x)$ の x^n の係数)、b_{n-2} は、c_{n-1} に、b_{n-1} に a をかけたものを足す、b_{n-3} は、c_{n-2} に、b_{n-2} に a をかけたものを足す、と順に求めていけば良く、最後、同じように、c_0 に、b_0 に a をかけたものを足したものが r になるという仕掛けになっている。これを計算しやすいように書くと次のようになる。

a	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\cdots$	c_1	c_0
		$b_{n-1}a$	$b_{n-2}a$	$\cdots$	b_1a	b_0a
	c_n	$c_{n-1} + b_{n-1}a$	$c_{n-2} + b_{n-2}a$	$\cdots$	$c_1 + b_1a$	$\boxed{c_0 + b_0a\,(= r)}$
	$(= b_{n-1})$	$(= b_{n-2})$	$(= b_{n-3})$	$\cdots$	$(= b_0)$	

例 4.1.1 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ とし $g(x) = x - 2$ として $f(x) = q(x)(x-2) + r$ となるような $q(x)$ と r を求める。

$\deg(f(x)) = 3$ だから $\deg(q(x)) = 2$ となるはずである。$r = f(2)$ だったから $f(x)$ の x に 2 を代入しても求められるが、組み立て除法で $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ と r を一度に求めてみる。右の表の最初の 3 行がこの計算の部分である。従って、$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 5)(x - 2) - 4$, 同様にして、3 行目から 5 行目は、$x^2 - 5$ を $x - 2$ で割り $x^2 - 5 = (x + 2)(x - 2) - 1$ になることを意味し、5 行目から 7 行目は、$x + 2$ を $x - 2$ で割ると $x + 2 = (x - 2) + 4$ と書けることの計算が組み立て除法でなされている。

2	1	−2	−5	6
		2	0	−10
2	1	0	−5	$\boxed{-4}$
		2	4	
2	1	2	$\boxed{-1}$	
		2		
	1	$\boxed{4}$		

これから

$$f(x) = (((x-2)+4)(x-2)-1)(x-2)-4 = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 - (x-2) - 4$$

と $f(x)$ を $x - 2$ に関する多項式として書くことができた。これは、2 に非常に近い値を近似的にもめるときに便利である。たとえば $x = 2.01$ とすると $(x-2)^3 = 0.01^4$, $(x-2)^2 = 0.01^2$ と非常に小さい数となり、2 の近くでの $f(x)$ の値は、$-4 - (x-2)$ を計算すれば近い値が求まり、もう少し精度を上げようとすれば、$-4 - (x-2) + 4(x-2)^2$ と、$f(x)$ を計算するよりは、簡単な式で計算できるからである。

4.1.3 補間法

$a_1, a_2, \cdots, a_m$ を相異なる数とする。$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_m)$、$P_i(x) = P(x)/(x - a_i)$ とすると、$j \neq i$ のときは、$P_i(x)$ は $(x - a_j)$ の項を含むから $P_i(a_j) = 0$ となる。また、$P_i(a_i) \neq 0$ である。そこで $Q_i(x) = P_i(x)/P_i(a_i)$ とすると、$Q_i(a_j) = 0$、$Q_i(a_i) = 1$ となる。

命題 4.1.2 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を相異なる数とする。このとき、

$$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2, \cdots, f(a_m) = b_m$$

を満たす多項式 $f(x)$ が存在する。ある多項式 $h(x)$ を用いて、$f(x)$ は次のように書くことができる。

$$f(x) = b_1Q_1(x) + b_2Q_2(x) + \cdots + b_mQ_m(x) + h(x)P(x)$$

特に次数 $\deg f(x) \leq m$ を満たすものはただひとつだけである。

例 4.1.2

$$\begin{aligned} f(x) &= b_1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + b_2 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + b_3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{b_1}{2}(x-2)(x-3) - b_2(x-1)(x-3) + \frac{b_3}{2}(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

は、$f(1) = b_1, f(2) = b_2, f(3) = b_3$ を満たす多項式であり、逆に $f(x)$ をこの条件を満たす多項式とすると、ある多項式 $h(x)$ で

$$\frac{b_1}{2}(x-2)(x-3) - b_2(x-1)(x-3) + \frac{b_3}{2}(x-1)(x-2) + h(x)(x-1)(x-2)(x-3)$$

と書くことができる。

多項式によって定義される関数は「非常に滑らか」なので、それぞれの点 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ で与えられた値をとる関数を与える方法として上の方法が用いられる。補間法 (Interpolation) と呼ばれる。

例 4.1.3 $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 14, f(4) = 30$ となる 3 次の多項式を求めてみましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &\quad + 14 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(1-3)(2-3)(4-3)} + 30 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{5}{2}(x-1)(x-3)(x-4) \\ &\quad - 7(x-1)(x-2)(x-4) + 5(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1) \end{aligned}$$

これで原理的には、補間法によって、与えられた点を通る多項式を求めることができました。計算は面倒な部分も多いですが、最近はその部分は計算機が計算してくれます。原理を知っていること。補間法が何をしているのかを理解することは大切です。

4.1.4　数学的帰納法*

次が成り立つ。

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4.1}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \tag{4.2}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^i b^{n-i-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{4.3}$$

証明：　(4.1) 2 倍にして考えると、

$$2(1 + 2 + \cdots + n) = (1+n) + (2+n-1) + \cdots + (n-1+2) + (n+1) = n(n+1)$$

ですから公式が得られます。

(4.2) (4.1) もそうですが、数学的帰納法を用いると、簡単に証明できます。数学的帰納法は次の原理によっているものです。

空でない自然数の集合は最小元を持つ。

「いくつかの自然数からなる集合にはいつでも一番小さい元がある」ということです。当たり前のことですね。この原理をもちいると次のことが証明できます。

自然数に関する命題 $P(n)$ において、$P(1)$ が真かつ、$P(k)$ が真であることを仮定した時 $P(k+1)$ が真であれば、すべての自然数 n について $P(n)$ は真である。記号で次のようにあらわすこともあります。$\forall k$ の部分は ‘for all k such and such hold’ と読みます。

$$(P(1) \wedge (\forall k)[P(k) \Rightarrow P(k+1)]) \Rightarrow (\forall n)P(n)$$

これを数学的帰納法の原理といいます。これが正しいことを証明してみましょう。

$$S = \{n \mid n \text{ は自然数で } P(n) \text{ は偽}\}$$

S は自然数からなる集合で $P(n)$ が真となる自然数すべてからなっているといういみです。ですから、S に入らない自然数 n については $P(n)$ が真となっています。(英語ではいくつかの自然数からなる集合のばあいは ‘a set of positive integers’ といいます。‘the set of positive integers’ は自然数全体からなる集合を意味します。さて上の S を英語で表現するとどうなるでしょうか。)

$S = \emptyset$ を示せば良いわけですから、$S \neq \emptyset$ とします。すると上の原理から、S に最小元 m が存在します。$m \in S$ ですから、$P(m)$ は偽です。$P(1)$ は真だと最初に仮定していますから、$m \neq 1$ です。m は 1 とはことなる自然数ですから、$m-1$ も自然数です。ところが、m は S の最小元でしたから、それより小さい $m-1$ は S に入りません。した

がって、$m-1 \notin S$ です。S に入っていない自然数については、命題は真のはずですから、$P(m-1)$ は真。ところが仮定より m の一つ前 $m-1$ で $P(m-1)$ が真なら、$P(m)$ も真でした。これは矛盾。したがって $S=\emptyset$。すなわち、すべての自然数 n について $P(n)$ は真です。

今、命題 $P(n)$ を次のようにおきます。

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$P(1)$ は真です。なぜなら左辺は、1 で右辺も 1 となります。$P(k)$ が真だとすると、

$$1^2+2^2+\cdots+k^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

です。これが成り立っていると仮定して、次の式を証明します。

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)$$

この式の左辺から出発すると、

$$\begin{aligned} LHS &= (1^2+2^2+\cdots+k^2)+(k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2 \ = \ \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) \ = \ \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

これが求める式でした。最初のところで、$P(k)$ が真であることを用いたことに注意して下さい。したがって、数学的帰納法により、すべての自然数について (4.2) が証明できました。

数学的帰納法による証明はなれると簡単ですが、最初から証明する式ができていないと、証明できません。つまり全体が把握されていないと証明に入れません。今の場合はそれが与えられていましたから、証明もできたという面が大きいのです。よく「証明することがわかれば、証明はそれほど難しくはない」といわれるゆえんです。(4.1) も同じように数学的帰納法で証明できます。証明を書いてみて下さい。

(4.3) この左辺を展開します。

$$\begin{aligned} &(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+a^ib^{n-i-1}+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \\ &= a^n+a^{n-1}b+\cdots+a^{i+1}b^{n-i-1}+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1} \\ &\qquad -a^{n-1}b-\cdots-a^{i+1}b^{n-i-1}-\cdots-a^2b^{n-2}-ab^{n-1}-b^n \\ &= a^n-b^n \end{aligned}$$

4.1.5 差分と多項式関数*

次のような数列を考えましょう。

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 3 & & 13 & & 34 & & 70 & & 125 & & 203 & & 308 & & 444 \\
& 0 & & 3 & & 10 & & 21 & & 36 & & 55 & & 78 & & 105 & & 136 & \\
& & 3 & & 7 & & 11 & & 15 & & 19 & & 23 & & 27 & & 31 & & \\
& & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & &
\end{array}$$

最初の数列を f_n、二番目を g_n、三番目を h_n とすると、

$$h_{n+1} - h_n = 4,\ g_{n+1} - g_n = h_n,\ f_{n+1} - f_n = g_n$$

となっていることがわかります。。新しい数列を作る方法を

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = g_n,\ \Delta^2 f_n = \Delta(\Delta f_n) = \Delta g_n = h_n, \ldots, \Delta^m f_n = \Delta(\Delta^{m-1} f_n), \ldots,$$

とすると、$\Delta f_n = g_n,\ \Delta^2 f_n = h_n,\ \Delta^3 f_n = 4,\ \Delta^4 f_n = 0$ となっています。同じように、$\Delta^2 h_n = 0$、$\Delta^3 g_n = 0$ となっている。さて、このとき、f_n などを n の関数のように表すことができないでしょうか。

$h_n = 3 + 4(n-1)$ です。この式で $h_1, h_2, h_3, \ldots$ の値があっていることを確かめて下さい。この数列を「公差 4、初項 3 の等差数列 (arithmetic sequence)」といいます。上の例の場合では、$g_{n+1} = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ だったので、

$$g_{n+1} = \frac{1}{2}n(4n+2) = n(2n+1),\ g_n = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1$$

となっています。g_{n+1} から g_n を得るところは g_m、$m = n+1$ したがって $n = m-1$ として導いた方が間違えが少ないかも知れません。では、f_n はどうなっているでしょうか。$f_{n+1} - f_n = 2n^2 - 3n + 1$ でしたから、

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= 0 + 3 + \cdots + (2n^2 - 3n + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 3k + 1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \quad \text{ここで公式 (4.1), (4.2) を用いると} \\
&= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1) \\
f_n &= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3)
\end{aligned}$$

となります。

すこしまとめてみましょう。一般に $\{f_n\}$ を数列としたとき、

- $\Delta f_n = 0$ ならば $f_n = d$。
- $\Delta f_n = d$ ならば $f_n = c + d(n-1)$ で $c = f_1$。さらにこの場合は、$\Delta^2 f_n = 0$ となっています。f_n は n の一次式。$c_0 + c_1 n$ という形をしています。

定理 4.1.3 $\Delta^{m+1} f_n = 0$ ならば f_n は n の m 次式、すなわち次の形をしている。

$$f_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m.$$

逆にこの形をしていると、$\Delta^{m+1} f_n = 0$。

証明.　まず、$\Delta n^m = m \cdot n^{m-1} + c_{m-2} n^{m-1} + \cdots c_1 n + c_0$ となる定数 $c_0, c_1, \ldots, c_{m-2}$ がとれることを証明します。

$$\begin{aligned}
\Delta n^m &= n^m - (n-1)^m \text{ 公式 (4.3) を用いると} \\
&= (n-(n-1))(n^{m-1} + n^{m-2}(n-1) + \cdots + n(n-1)^{m-2} + (n-1)^{m-1}) \\
&= m \cdot n^{m-1} + (m-2 \text{ 以下の } i \text{ にたいする } n^i \text{ に係数がついた項})
\end{aligned}$$

これによって、最初にかいたような定数 $c_0, c_1, \ldots, c_{m-2}$ がとれることが分かりました。
　それでは、数学的帰納法で、次の命題を証明しましょう。

$P(m) : \Delta^m f_n = 0 \Leftrightarrow f_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_{m-1} n^{m-1}$ となる定数 $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ がとれる

　最初に $\Leftarrow$ を証明します。
　$P(1)$: $f_n = a_0$ となる定数 a_0 があれば $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = a_0 - a_0 = 0$ ですから、$\Delta f_n = 0$ を満たします。
　$P(k)$ が成り立っているとします。すなわち、どんな数列も n に関して $k-1$ 次式で書けていれば、Δ^k をとると 0 になるとします。

$$\begin{aligned}
&\Delta^{k+1}(a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k) \\
&= \Delta(\Delta^k(a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1})) + \Delta^k(\Delta n^k) \\
&= \Delta 0 + \Delta^k(k n^{k-1} + c_{k-2} n^{k-2} + \cdots + c_1 n + c_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり証明できました。
　次に $\Rightarrow$ を証明します。
　$P(1)$: $\Delta f_n = 0$ とすると、$0 = \Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ ですから、$f_1 = a_0$ とすると、$f_n = a_0$ となる。
　$P(k)$ が満たされていると仮定する。
　$P(k+1)$: $\Delta^{k+1} f_n = 0$ とします。$g_n = \Delta f_n$ とおくと $\Delta^k g_n = \Delta^k \Delta f_n = \Delta^{k+1} f_n = 0$ だから $P(k)$ を仮定したことより、$g_n = b_0 + b_1 n + \cdots + b_{k-1} n^{k-1}$ となる定数 $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ をとることができます。ここで

$$h_n = f_n - \frac{b_{k-1}}{k} n^k$$

とおき、証明の最初に示したことを使うと、

$$\begin{aligned}\Delta h_n = h_{n+1} - h_n & \\ &= (f_{n+1} - \frac{b_{k-1}}{k}(n+1)^k) - (f_n - \frac{b_{k-1}}{k}n^k) \\ &= (f_{n+1} - f_n) - \frac{b_{k-1}}{k}((n+1)^k - n^k) \\ &= \Delta f_n - \frac{b_{k-1}}{k}\Delta n^k \quad n^k \text{ に最初に示した式を用いると} \\ &= g_n - \frac{b_{k-1}}{k}(k \cdot n^{k-1} + c_{k-2}n^{k-2} + \cdots + c_1 n + c_0) \\ &= (b_{k-2} - \frac{b_{k-1}}{k}c_{k-2})n^{k-2} + \cdots + (b_1 - \frac{b_{k-1}}{k}c_1)n + (b_0 - \frac{b_{k-1}}{k}c_0)\end{aligned}$$

となり、Δh_n は $k-2$ 次になりますから、$\Leftarrow$ をもちいると、$\Delta^k h_n = \Delta^{k-1}\Delta h_n = 0$。帰納法の仮定より $P(k)$ を用いると、$h_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1}n^{k-1}$ となる定数 $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ があることが分かります。ここで、$a_k = b_{k-1}/k$ とおけば、$f_n = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k$ となることが分かります。 ■

4.2 極限と関数の連続性

4.2.1 数列の極限と級数

数列: 数列 (sequence) $1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots$ において n を大きくしていくと $1/n$ は小さくなり 0 に近づく。一般に、数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ が一定の値 α に近づく時、$\{a_n\}$ は α に収束 (converge) する、または $\{a_n\}$ の極限値は α であるといい、記号で

$$a_n \to \alpha \, (n \to \infty), \text{ または } \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書く。従って $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ である。収束しない数列は発散する (diverge) という。発散する場合はさらに、「正の無限大に発散」(限りなく大きくなる時)、「負の無限大に発散」(負の値をとりながらその絶対値は限りなく大きくなる時) といい、いずれでもない場合「振動する」ということもある。

例 4.2.1 1. $\lim_{n\to\infty} n = \infty$: 正の無限大に発散.

2. $\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$: 負の無限大に発散.

3. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n$: 発散：振動.

4. $a_n = r^n$ のときは次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty: \text{ 正の無限大に発散} & \text{if } r > 1 \\ 1: \text{ 1 に収束} & \text{if } r = 1 \\ 0: \text{ 0 に収束} & \text{if } |r| < 1 \\ \text{発散：振動} & \text{if } r \leq -1 \end{cases}.$$

命題 4.2.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき、以下が成り立つ。

(1) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = c\alpha, \quad (c$ は定数$)$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (b_n \neq 0, \beta \neq 0)$

例 4.2.2 1. $\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} = 2 - 0 = 0.$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} 3 - \frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} 4 + \frac{1}{n}\right) = 3 \cdot 4 = 12.$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{2-n}{3n-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n} - 1}{3 - \frac{5}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - 1}{\lim_{n\to\infty} 3 - \frac{5}{n}} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}.$

6. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n + 2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} n + 2 + \frac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} n + 2 = \infty.$

7. $\lim_{n\to\infty}(-3)^n =$ 発散：振動.

8. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = 0.$

9. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1.$

級数:　数列 $\{a_n\}$ において、初項（最初の項）a_1 から第 n 項までの和を第 n 部分和といい s_n とおく。

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\{s_n\}$ が s に収束するとき 無限級数 (infinite series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

は収束し和が s であるといい、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ と書く。$\{s_n\}$ が発散するとき、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するという。

公式 (5-1) で $a = 1$、$b = r$ とすると、

$$1 - r^n = (1-r)(1 + r + \cdots + r^{n-i-1} + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1})$$

だから

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = a\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

となる。これより等比数列 $\{a_n = ar^{n-1}\}$ に関して次の結果を得る。

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = a\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & (-1 < r < 1) \\ \text{発散} & (r < -1,\ \text{or } r > 1) \end{cases} \tag{4.4}$$

例 **4.2.3** 無限等比級数の収束、発散。

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{81}{3^n} = 27 + 9 + 3 + 1 + \cdots = \frac{81}{1-\frac{1}{3}} = \frac{243}{2}$.

2. $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}2^n = 2 - 4 + 8 - 16 + \cdots$：発散.

収束するということ：　もう少し複雑な数列や級数を扱うようになると、直観的な定義では不十分な場合が起こってくる。たとえば 数列 $\{a_n\}$ が α に収束すれば、平均をとってできる数列

$$s_1 = a_1,\ s_2 = \frac{a_1 + a_2}{2},\ s_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},\ \cdots,\ s_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n},\ \cdots$$

は α に収束する。このような問題を扱うためにも n を大きくしていくと数列 $\{a_n\}$ が一定の値 α に近づくということを厳密に定義しておかなければならない。

定義 **4.2.1** 数列 $\{a_n\}$ が与えられた時、正の数 ϵ をどのように選んでも、$m \geq m_0$ であれば

$$|a_m - \alpha| < \epsilon$$

が成立するように m_0 を見つけることができるとき（m_0 は ϵ によって変わってくる)、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と記す。

一般に $|a+b| \leq |a| + |b|$ が成り立つ。これと上の定義を用いて、命題 4.2.1 (2) を証明してみよう。

証明：　任意に正の数 ϵ が与えられたとする。このとき $m \geq m_0$ であれば

$$|(a_m + b_m) - (\alpha + \beta)| < \epsilon \tag{4.5}$$

が成立するような m_0 を見つけることができることを示す。

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ だから、正である $\epsilon' = \epsilon/2$ について、$m \geq m_1$ であれば

$$|a_m - \alpha| < \epsilon' \tag{4.6}$$

が成立するような m_1 を見つけることができる。同様に、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ だから、$m \geq m_2$ であれば

$$|b_m - \alpha| < \epsilon' \tag{4.7}$$

が成立するような m_2 を見つけることができる。ここで m_1、m_2 の大きい方を m_0 とすると、$m \geq m_0$ であれば (4.6) も (4.7) も満たされる。したがって、

$$|(a_m + b_m) - (\alpha + \beta)| \leq |a_m - \alpha| + |b_m - \beta| < \epsilon' + \epsilon' = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つ。したがって、$m \geq m_0$ であれば (4.5) を満たすような m_0 を見つけることができた。定義からこれは

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \alpha + \beta$$

がを意味する。 ■

上の議論では、収束の定義から ϵ が何であれ正の数であれば、それに対応してある条件をみたす、m_0 をとることができることが重要であった。ϵ は何であっても良かったので、$\epsilon' = \epsilon/2$ についても条件を満たす数を取ることができることを用いて、証明することができた。

4.2.2　関数の極限・連続性

定義 4.2.2 関数 $f(x)$ において 変数 x が a と異なる値をとりながら a に近づくとき、$f(x)$ が一つの値 α に近づくならば x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値は α であるといい、

$$f(x) \to \alpha \ (x \to a) \text{ または } \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

で表す。

すなわち、ある区間 $c < x < d$ で定義された関数 $f(x)$ が与えられた時、正の数 ϵ をどのように選んでも、$0 < |x-a| < \delta$ であれば

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

が成立するように δ を見つけることができるとき（δ は ϵ によって変わってくる）、α は、関数 $f(x)$ の a における極限であるといい、

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

と記す。

命題 4.2.2 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$、$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \beta$ のとき、以下が成り立つ。

(1) $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x) = c\alpha \quad$ (c は定数)

(2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = \alpha+\beta$

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = \alpha\beta$

(4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \quad (g(x)\neq 0,\ \beta\neq 0)$

関数 $f(x) = x^2+1$ において変数 x が 2 と異なる値をとりながら 2 に近づく時 $f(x)$ は値 $f(2) = 5$ に近づく。$|a+b| \leq |a| + |b|$ を用いると、2 の近くでは $|x| < 3$ として良いから、

$$|f(x)-5| = |x^2+1-5| = |x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| \leq |x-2|(|x|+2) < 5|x-2|$$

であるから、$x\to 2$ すなわち $|x-2|\to 0$ のとき $|f(x)-5|\to 0$ となる。従ってこの場合、$f(x)$ の 2 における極限値は、$x=2$ における値 $f(2)$ になっている。

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2+1 = 2^2+1 = 5 = f(2).$$

定義 4.2.3 一般に関数 $f(x)$ において、$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ時、関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続 (continuous) であるという。また、関数が定義されている各点で $f(x)$ が連続であるとき、$f(x)$ は連続である、または連続関数であるという。

このことは、a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ について、次が成り立つことと同値である。

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

すなわち、f が lim 記号と「交換可能」であると表現することもできる。

例 4.2.4 定数関数 c、多項式（その他 $\sin x$、$\cos x$、e^x など）は、各点で連続、また、連続関数の和、差、定数倍、積も、連続関数。商も、分母が零にならない範囲で連続関数である。

例 4.2.5 1. $f(x) = (x^2+7x)/(x+1)$ の -2 での極限値と考える。x^2+7x も $x+1$ も多項式だから $x=-2$ で連続でかつ、分母の $x+1$ は $x=-2$ の近くで 0 にならないから、

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x}{x+1} = \frac{\lim_{x\to -2} x^2+7x}{\lim_{x\to -2} x+1} = \frac{(-2)^2+7(-2)}{(-2)+1} = \frac{-10}{-1} = 10.$$

この場合は $f(-2) = 10$ だから $f(x)$ は $x=-2$ で連続である。

2. $g(x) = (x^2-5x+4)/(x-4)$ の 4 での極限値を考える。$x=4$ では分母が 0 になるので、$g(x)$ は $x=4$ で定義されていない。しかし、$x \neq 4$ では定義されている。分子は $x^2-5x+4 = (x-4)(x-1)$ だから $x \neq 4$ では $g(x) = x-1$ になる。従って、

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x-4} = \lim_{x\to 4} x-1 = 4-1 = 3.$$

関数の a での極限は、$x \neq a$ で x が a に近づいて行くときの $g(x)$ の値が α に近づくとき $g(x) \to \alpha$ というのであった。$x \neq a$ の条件に注意。この関数は $x=4$ で定義されていないので、連続性は問えないが、別途 $g(4)=3$ と定義すれば、$g(x)$ は $x=4$ で連続。実際には分母が 0 になるのは、$x=4$ の時だけだったから、$g(x)$ は連続関数（すべての実数で連続）である。$g(4)=0$ などと定義すると、$g(x)$ はすべての実数で定義されているが、$x=4$ では連続ではない。となる。

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} x-1 = -1.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4.$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+2 = 1+2 = 3.$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+1} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+1} = 4.$

命題 4.2.3 閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ において、C を、$f(a)$ と、$f(b)$ の間の値とすると、$f(c) = C$ となる点 c が、区間 $[a,b]$ 内にある。

例 4.2.6 $f(x)$ を奇数次数の多項式とすると、$f(x) = 0$ は必ず根をもつ。

例 4.2.7 $f(x) = 4x^5-10x^4-20x^3+40x^2+16x-15$ とする。$f(-2) = -15$、$f(-1) = 15$、$f(0) = -15$、$f(1) = 15$、$f(2) = -15$、$f(3) = 15$。従って、5 つの区間 $[-2,-1]$、$[-1,0]$、$[0,1]$、$[1,2]$、$[2,3]$ の内部で、$f(x) = 0$ となる点、すなわち根を少なくとも一つずつ持つ。$f(x)$ は、5 次多項式だから、高々 5 個の実根を持つ。すなわち、この 5 個以外には、根を持たず、これらの区間に丁度一つずつあることも解ります。（なぜでしょう。）

命題 4.2.4 閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ は、$[a,b]$ 上の最大・最小をとる。

Note. 上の命題で、閉区間でない場合は、必ずしも、最大・最小を持つとは限らない。
例えば、$f(x) = -x^2 + 2x + 1$、$(0 < x < 2)$ とすると、$1 < f(x) \leq 2 = f(1)$ だから、区間 $(0, 2)$ で最大値は取るが、最小値は取らない。

4.2.3 指数関数・対数関数

定義 4.2.4 [指数関数] $a > 0$ に対して $f(x) = a^x$ とした関数を（a を底とする）指数関数 (exponential function) という。a^x は次の (i) - (iii) によって定義する。

(i) $a^0 = 1,\ \ a^n = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ times}},\ \ a^{-n} = (1/a)^n$（$n$ が自然数のとき）

(ii) $a^{p/q} = \sqrt[q]{a}^p$ （p, q が整数で $q > 0$ のとき）

(iii) $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{b_n}$ （数列 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ が x に収束するとき）

たとえば、$a = 2$ としたとき、2^3, $2^{3.1}$, $2^{3.14}$, $2^{3.141}, \ldots$ の収束する値を 2^π とするのである。

命題 4.2.5 (指数法則) $a > 0$ とする。任意の実数 x, y に対して、次が成立する。

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

定義 4.2.5 [対数] $1 \neq a > 0$ とし、$b = a^x$ となるとき $x = \log_a b$ と書く。x を a を底 (base) とする b の対数 (logarithm) という。$b > 0$ ならば $b = a^x$ となる x が一つに決まるのでその x を $\log_a b$ と書く。

$a^0 = 1$ だから $\log_a 0 = 1$。また定義から $a^{\log_a x} = x$ である。

例 4.2.8 $a = 10$ とすると、$10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $100000 = 10^5$, $0.1 = 10^{-1}$, $0.01 = 10^{-2}$ だから

$$\log_{10} 10 = 1,\ \log_{10} 100 = 2,\ \log_{10} 100000 = 5,\ \log_{10} 0.1 = -1,\ \log_{10} 0.01 = -2.$$

$a = 2$ とすると、$2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $1024 = 2^{10}$, $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, $1/2 = 2^{-1}$ だから

$$\log_2 2 = 1,\ \log_2 4 = 2,\ \log_2 1024 = 10,\ \log_2 \sqrt{2} = 0.5,\ \log_2(1/2) = -1.$$

命題 4.2.6 $a > 0$ とすると次が成立する。

(i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(ii) $\log_a x^y = y \log_a x$.

(iii) $b>0$ とすると、$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

証明. (i) $b=\log_a x,\ c=\log_a y$ とすると、定義から、$x=a^b,\ y=a^c$ だから $a^{b+c}=a^b\cdot a^c=xy$。従って、$\log_a xy=b+c=\log_a x+\log_a y$.
(ii) $b=\log_a x^y,\ c=\log_a x$ とすると、$a^b=x^y,\ x=a^c$ だから $x^y=a^b=(a^c)^y=a^{cy}$。従って、$\log_a x^y=b=cy=y\log_a x$。
(iv) $c=\log_a x,\ d=\log_b a$ とする。$x=a^c,\ a=b^d$ だから $x=a^c=(b^d)^c=b^{cd}$ となり、

$$(\log_a x)(\log_b a)=cd=\log_b x,\ \text{従って}\ \log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

となる。 ■

例 **4.2.9** $f(x)=c\cdot a^{bx}$ なる関数の a を底とする対数を表す関数を $g(x)$ とする。すると、

$$g(x)=\log_a(c\cdot a^{mx})=\log_a c+m\cdot x=m\cdot x+b,\ (b=\log_a c)$$

したがって、$g(x)$ は x に関する一次関数で表された。 このように指数関数で表されるものは、対数をとると、簡単な関数で表すことができるため、実際の値ではなく対数をとった値を使うことがある。

マグニチュード： 地震波のエネルギーの大きさはマグニチュードで表される。マグニチュードは、地震のエネルギーの対数を取ったものである。M8 の地震の地震波のエネルギーは $6.3\times10^{16}J$（J はエネルギーの単位ジュール）である。断層運動など全体のエネルギー（岩石を破壊したり、大地を動かしたりするエネルギー）はその10倍程度である。地震の強さの表現の仕方は様々であるが、エネルギーの対数を取って表すものが多い。マグニチュードが1大きくなるとエネルギーは32倍になる。日本で1年間に使われる電力エネルギーは M8.4 の地震全体のエネルギーに匹敵する。広島型の原爆は 20 kton（キロトン）爆弾で $8.4\times10^{13}J$ で大体 M6 の地震のエネルギーに相当する。(kton：トリニトロトルエン (TNT) 火薬 1000J/g に換算してどの程度のエネルギーかを表す爆弾の大きさを表す単位。)

4.2.4 Nepier の数（自然対数の底） e

$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ とすると、$a_1=2,\ a_2=2.25,\ a_3=2.37,\dots,a_n=2.59,\ a_{12}=2.61,\ a_{365}=2.71\dots$ となる。この数列は増加しかつ 3 を越えないことから収束することが知られている。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.7182818284590\cdots \tag{4.8}$$

$(1+1)^1=2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.37\cdots,\ \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=2.59\cdots,\ \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=2.61\cdots,\ \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}=2.71\cdots$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{4.9}$$

4.2.5　三角関数*

半径 1 の円上の点で x-軸から反時計回りに角度をはかり、角度 x の点の座標を $(\cos x, \sin x)$ で表す。また $\tan x = \sin x / \cos x$ で表す。角度は、今後弧度 (radian) を用いる。弧の長さで角度を表す表し方で、円周の長さは 2π だから次のようになる。

$$0 = 0^\circ,\ \frac{\pi}{6} = 30^\circ,\ \frac{\pi}{4} = 45^\circ,\ \frac{\pi}{3} = 60^\circ,\ \frac{\pi}{2} = 90^\circ,\ \pi = 180^\circ,\ 2\pi = 360^\circ$$

定義から簡単に次のことが分かる。

(1) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$

(2) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

(3) $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$。慣習として $(\sin x)^n$ を $\sin^n x$、$(\cos x)^n$ を $\cos^n x$ と書くことが多い。

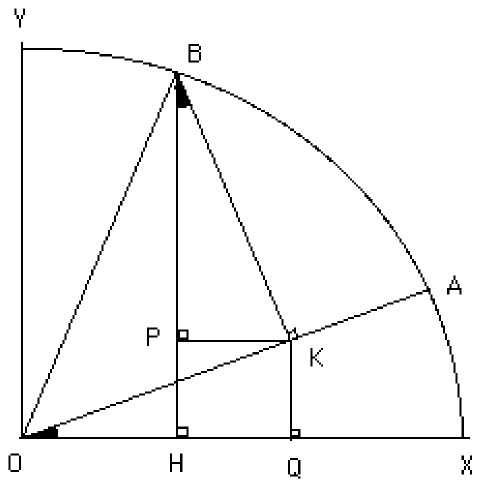
次の公式は三角関数の加法公式と呼ばれる。

(4) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$、$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$。

(5) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$、$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$。

三角関数の加法公式の証明:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{4.10}$$



O を中心とした半径 1 の円弧を考え、x-軸と交わる点を X とし、A, B を $\angle AOB = x$、$\angle AOX = y$、$\angle BOX = x + y$ となるようにとる。B から OX に下ろした垂線が OX と交わる点を H、B から OA に下ろした垂線が OA と交わる点を K、K から OX に下ろした垂線が OX と交わる点を Q、K から BH に下ろした垂線が BH と交わる点を P とする。まず $\angle KBP = \angle KOQ = y$ であることを示す。$OX//PK$ で $\angle KOQ$ と $\angle OKP$ は錯角だから等しい。$\angle KBP + \angle BKP = \pi/2\ (= 90^\circ)$、$\angle OKP + \angle BKP = \pi/2 (= 90^\circ)$ だから $\angle KBP = \angle OKP = \angle KOQ = y$ となる。

$\triangle BOH$ を考えると $\overline{BH} = \sin(x+y)$。一方 $\triangle KBP$ において $\overline{BK} = \sin x$、$\angle KBP = y$ だから $\overline{BP} = \sin x \cos y$ である。今度は、$\triangle KOQ$ において $\overline{OK} = \cos x$ だから $\overline{KQ} = \cos x \sin y$。$\overline{PH} = \overline{KQ}$ だから次の式が得られる。

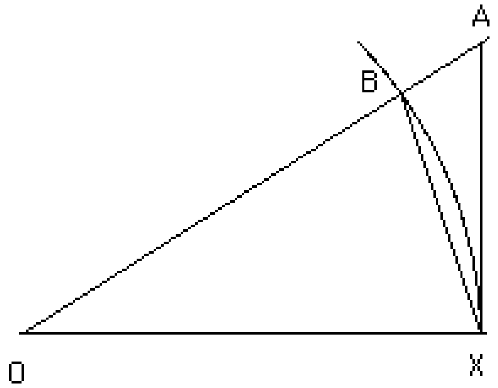
$$\sin(x + y) = \overline{BH} = \overline{BP} + \overline{PH} = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

従って、最初の式が得られた。後の式も $\overline{OH} = \overline{OQ} - \overline{PK}$ を表すことにより得られる。$x + y$ が $\pi/2$ より大きいときについても同様の議論ができる。 ■

極限:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ ただし } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{4.11}$$

O を中心とした半径1の円弧を考え、x-軸と交わる点を X とし、B を $\angle BOX = x$ となるように円弧上にとる。また X を通る OX の垂線と OB の交わる点を A とする。ここで $\triangle BOX$、扇形 OBX、$\triangle AOX$ の面積の2倍を求めると次の式を得る。



$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

これより求める式を得る。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{4.12}$$

例 4.2.10　1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3}\lim_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{3}.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = \frac{2}{3}.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$

4.3 微分係数と導関数

次の二つの関数を考える。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x + 1 \\ g(x) &= x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

微分を利用する最初は、関数がどんな動きをしているかを調べることである。例えば具体的には次のような問題を考える。

A. $f(x) = 0$ はいくつ解を持つでしょうか。$f(x)$ と $g(x)$ は何回交わるでしょうか。

B. $x = 1$ の辺では $f(x)$ は増えているのでしょうか、減っているのでしょうか。

C. $x \geq 0$ で $f(x)$ が一番小さくなるのはいつでしょうか。

まず $y=f(x)$、$y=g(x)$ が大体どのようなグラフかを書いてみるために、それぞれの x にたいする値を書いてみましょう。

	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^3-x+1	$\cdots$	-5	1	1	1	7	25	$\cdots$
x^2-2x-1	$\cdots$	7	2	-1	-2	-1	2	$\cdots$
x^3-x^2+x+2	$\cdots$	-12	-1	2	3	8	$\cdots$	

これから大体予想できる。

a. $f(x)=0$ は $-2<x<-1$ に解を一個もつ。$0<x<1$ の間に解があるかも知れないがどうもあとはなさそうだ。

$h(x)=f(x)-g(x)$ を考えると、交わるのは $h(x)=0$ の時だから $-1<x<0$ で交わる。あとは、交わらないようだ。

b. $f(x)$ が $x=1$ の辺で増加しているか減少しているかを見るためには、h を小さな数として $f(1+h)-f(1)$ を考えてみるのが良いのではないでしょうか。

$$(f(1+h)-f(1)>0 \text{ if } h>0)\wedge(f(1+h)-f(1)<0 \text{ if } h<0)\Leftrightarrow \text{増加}$$

となっています。ここで、$\Delta f=f(1+h)-f(1)$ (Δ は Difference からとっています。前にも他のものを Δf で表しましたから注意して下さい）とおいて計算してみると、

$$\Delta f=f(1+h)-f(1)=(1+h)^3-(1+h)+1-(1^3-1+1)=h((1+h)^2+(1+h))$$

となり、$h>0$ なら $\Delta f>0$、$h<0$ なら $\Delta f<0$ ですから上のことから $f(x)$ は $x=1$ で増加していることがわかります。ただこの Δf は h がゼロに近づくとやはりゼロになってしまいます（これは、$f(x)$ が連続という性質でした)。そこで、Δf ではなくこれを h で割ったものを考えると、一般に $x=a$ の近くで（すなわち小さい h に対して）

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0\Leftrightarrow\ f(x) \text{ は } x=a \text{ の近くで増加}$$

となっています。では、h を 0 に近づける、すなわち極限をとって、それが正か負かで増加しているか、減少しているかが分かりそうです。

ほかの見方をすると、これは、$x=a$ における接線の傾きを考えていることになっています。

c. 一番ちいさくなっていたり、大きくなっていたりするところでは、減少から増加に変わったり、増加から減少にかわったりしていますから、$(f(a+h)-f(a))/h$ が h が 0 に近づいて来て負から正になるときに、負から正に変わったり、正から負に変わったりすることがわかります。ですから、この極限値が存在すれば、そこでは 0

になっているはずです。他の言い方では、接線が x-軸に平行になる点を求めれば、そのへんで一番ちいさくなっていたり、大きくなっていたりするところが分かりそうです。

A. グラフの概形を描きたい。

B. 関数の変化率を調べたい。

C. 山のテッペン、谷の底を知りたい。

D. もっと難しい複雑な関数も扱いたい。

E. x だけじゃなくて、y も含んでいるような関数、例えば、$f(x, y) = 4xy - 2y^2 - x^4$ なんかについては、分からないの。

F. 微分てほかにどんなことに使えるの。

定義 4.3.1 関数 $f(x)$ が、点 $x = a$ 及びその近くで定義されていて、かつ

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

が存在するとき、この値を $f(x)$ の点 a における微分係数と言い、$f'(a)$ と書く。関数 $f(x)$ が、各点 a で微分可能であるとき、a に $f'(a)$ を対応させる関数を $f(x)$ の導関数と言い、$f'(x)$、df/dx、Df で表す。関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求めることを、微分するという。

命題 4.3.1 (1) $h \neq 0$ が小さいとき常に $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$ であることと、$f(x)$ が $x = a$ で増加していることは同値。

(2) $h \neq 0$ が小さいとき常に $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$ であることと、$f(x)$ が $x = a$ で減少していることは同値。

(3) $f'(a) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で増加。

(4) $f'(a) < 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で減少。

Note. (3), (4) の逆は成り立ちません。その例はあとで学びます。

最初の例では、

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0}((1+h)^2 + (1+h)) = 2 > 0.$$

ですから、$x = 1$ で $f(x)$ は増加しています。

命題 4.3.2 関数 $f(x)$ が、点 a で微分可能ならば、点 a で、連続である。

証明. 関数 $\alpha(x)$ を次のように定義する。

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases}$$

すると、$\alpha(x)$ は、定義から、点 a で連続。従って、

$$f(x) = \alpha(x)(x-a) + f(a)$$

も、点 a で連続。 ■

Note. 上の命題において、逆は必ずしも成り立たない。すなわち、連続でも、微分可能とは言えない。例えば、$f(x) = |x|$。

$\lim_{x\to a} \alpha(x) = f'(a)$ だから a の近くでは $f(x)$ は $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ となっていることがわかります。この関数は、$g(a) = f(a)$ で傾きが $f'(a)$ の直線をあらわしています。これを $f(x)$ の $x = a$ における接線といいます。

命題 4.3.3 $f(x)$, $g(x)$ を微分可能な関数、c を定数とすると以下が成り立つ。

(1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, $(cf(x))' = cf'(x)$

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

証明. まず、$f(x)$, $g(x)$ が微分可能ということから、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),\ \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

が成り立っています。

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x). \end{aligned}$$

したがって (1) が得られます。(2) も同様に、

$$\begin{aligned}(cf(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\\ &= c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= cf'(x).\end{aligned}$$

(3) は少し複雑ですが、途中に式をはさむと、

$$(f(x)g(x))' \tag{4.13}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \tag{4.14}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h))+(f(x)g(x+h)-f(x)g(x))}{h} \tag{4.15}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \tag{4.16}$$
$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x). \tag{4.17}$$

(4.14) は定義です。(4.14) から、(4.15) は、分子の間に $-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)=0$ をはさんだだけですから、等しいですね。(4.15) から、(4.16) は式の変形です。ただ、左の項は、$g(x+h)$ をかっこでくくってから、二つの極限の積に書き替えました。(4.16) から (4.17) は、最初の項の、一つめが、$f'(x)$ になることと、一番最後が $g'(x)$ になることは、定義ですから大丈夫でしょう。するとあとは、$\lim_{h\to 0}g(x+h)$ の部分ですが、それは、$g'(x)$ が存在する、すなわち、$g(x)$ が微分可能であるためには、一番最後の、$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ が存在しないといけません。分母は 0 に近づくので、分子も 0 に近づく。すなわち、$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$ でないといけませんから、それを用いると、最後の式が導けます。最後のステップでは $g(x)$ が微分可能であることから、$g(x)$ は連続であり（命題 4.3.2)、したがって $\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$ が成り立つと表現することもできます。普通は、$(f(x)g(x))'=f'(x)g'(x)$ となりそうですが、こうならない理由を上の証明から考えて下さい。たとえば、

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=(x)'x+x(x)'=x+x=2x$$

であって、$1=(x)'\cdot(x)'$ ではありません。(3) は二段階に分けて考えましょう。まずは、$f(x)=1$ の場合。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{hg(x+h)g(x)}(g(x)-g(x+h))\\ &= \frac{1}{g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}\lim_{h\to 0}\left(-\frac{g(x+h)+g(x)}{h}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(g(x))^2}(-g'(x)) \\
&= -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}
$$

ここで $f(x)/g(x) = f(x)\cdot(1/g(x))$ であることから、上に示したことと (2) を用いると、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}
$$

となり結果が得られます。 ■

例 **4.3.1** 1. （多項式の微分）$f(x) = x^n$ の、$x = a$ における、微分係数と導関数。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\
&= na^{n-1}
\end{aligned}
$$

従って、$f(x) = x^n$ の導関数は、$f'(x) = nx^{n-1}$。

2. （三角関数の微分）$f(x) = \sin x$ の、$x = a$ における、微分係数と導関数。

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$x = a + h$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h/2)\sin(h/2)}{h/2} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos(a+h/2)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} \\
&= \cos a
\end{aligned}
$$

従って、$f(x) = \sin x$ の導関数は、$f'(x) = \cos x$。ここで、以下の公式を用いている。

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

これは、単位円の扇形と、それを挟む、三角形の面積を用いた次の不等式から得られる。

$$\frac{1}{2}\sin\theta \le \pi\cdot\frac{\theta}{2\pi} \le \frac{1}{2}\tan\theta, \quad 1 \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta}$$

3. （指数関数の微分）$(e^x)' = e^x$。ここで、

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

とする。$e = 2.71828182845904523\ldots$ は、無理数のなかでも、特に、超越数と呼ばれ、どんな有理数係数の多項式の根にもなっていないことが知られている。

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h} = e^a\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

従って、$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を示せばよい。

$e^h = 1+1/t$ とおく。$h = \log(1+1/t)$ だから、

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{1/t}{\log(1+1/t)} = \frac{1}{\log(1+1/t)^t}$$

従って、結局、$h\to 0$ のとき、$e^h\to 0$ のとき、従って、$t\to\infty$ で、$(1+1/t)^t\to e$ を言えばよい。実は、これは上の、自然対数 e の定義から得られる。

微分法復習

例 4.3.2 微分（導関数を求めること）。

1. $y = 4x^3+5x^2-3x,\ y' = 4\cdot(x^3)'+5\cdot(x^2)'-3\cdot(x)' = 12x^2+10x-3.$
2. $y = x^2-3x+1,\ y' = 2x-3.$
3. $y = 3x^3-2,\ y' = 9x^2.$
4. $y = 2x^3-5x^2-3,\ y' = 6x^2-10x.$
5. $y = (3x+1)(x^2+x+2),\ y' = 3(x^2+x+2)+(3x+1)(2x+1) = 9x^2+8x+7.$
6. $y = (x+1)(3x-1),\ y' = (3x-1)+3(x+1) = 6x+2.$
7. $y = (2x+1)(x^2-x-3),\ y' = 2(x^2-x-3)+(2x+1)(2x-1) = 6x^2-2x-7.$
8. $y = (x^2-x+1)(x^2-2x+3),\ y' = (2x-1)(x^2-2x+3)+(x^2-x+1)(2x-2) = 4x^3-9x^2+12x-5.$
9. $y = (x^2+1)(x^3-x^2),\ y' = 2x(x^3-x^2)+(x^2+1)(3x^2-2x) = 7x^4-4x^3+3x^2-2x.$
10. $y = \dfrac{1}{x^3},\ y' = \dfrac{-3}{x^4}.$
11. $y = \dfrac{7x-6}{x^2+1},\ y' = \dfrac{-7x^2+12x+7}{(x^2+1)^2}.$

12. $y = \dfrac{1}{x+3}, y' = \dfrac{-1}{(x+3)^2}.$

13. $y = x^2 e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x},\ y' = (2x - x^2)e^{-x}$

練習問題 4.3.1 以下の関数を微分せよ。

1. $y = x^2 - 2x - 1$
2. $y = x^3 - x^2 + 2x + 1$
3. $y = -7x^5 + x^3 + 2x - 6$
4. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$
5. $y = \dfrac{3x - 5}{x^2 + x + 2}$
6. $y = (2x + 3)^2$
7. $y = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$
8. $y = \dfrac{x - 2}{2x - 1}.$
9. $y = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 2}.$
10. $y = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - x + 1}.$

4.3.1 合成関数の微分

命題 4.3.4 $g(x)$ は、点 a で微分可能、$f(x)$ は、点 $g(a)$ で微分可能とする。このとき、

$$\frac{d}{dx} f(g(a)) = f'(g(a))g'(a)$$

証明. $F(x) = f(g(x))$ とおく。すると、

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(g(a))g'(a) \end{aligned}$$

$g(x)$ は、点 $x = a$ で微分可能だから、連続、すなわち、x が、a に近づくとき、$g(x)$ は、$g(a)$ に近づく。 ■

この公式が使えるようになるととても便利です。英語では Chain Rule と言います。

例 4.3.3 1. $y = (3x+1)^4$。これは、展開して、$y = 81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1$ として、微分すると、$y' = 324x^3 + 324x^2 + 108x + 12$ となります。しかし、ここで、$f(x) = x^4$, $g(x) = 3x + 1$ とすると、$f(g(x)) = (3x + 1)^4$ となりますから、上の公式を用いることができる状況にあります。$f(g(x))$ のいみは、$f(x) = x^4$ の x を $g(x) = 3x + 1$ で置き換えたと言う意味です。$f'(x) = 4x^3$, $g(x) = 3$ ですから、$y = f(g(x))$ のとき $y' = f'(g(x))g'(x) = 4(3x + 1)^3 \cdot 3 = 12(3x + 1)^3$ となります。すなわち、$3x + 1$ をひとかたまりたとえば X とおいて（この場合は X^4 と考え)、X の関数だと思って全体を微分し、その結果（この場合は $4X^3 = 4(3x + 1)^3$）に X の部分（この場合は、$3x + 1$）を x で微分したもの（この場合は 3）をかけておくという形になっています。

2. $y = (1 - 2x^2)^3$。この場合は $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 - 2x^2$ とおくと、$f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = -4x$ ですから $y' = 3(1 - 2x^2)^2(-4x) = -12x(1 - 2x^2)^2$ となります。

3. $y = e^{-x^2}$ では、$f(x) = e^x$, $g(x) = -x^2$ と見ることができます。ですから、$y' = -2xe^{-x^2}$ となります。

4. $y = (2x + 3)^5$, $y' = 5(2x + 3)^4 \cdot 2 = 10(2x + 3)^4$.

5. $y = (3x - 2)^7$, $y' = 21(3x - 2)^6$.

6. $y = \left(x - \dfrac{2}{x}\right)^6$, $y' = 6\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^5\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)$

4.3.2　x^n の微分

$y = x^n$ の微分について考えましょう。

n が正の整数または 0 のとき:　$y = x^n$ とおくと、$y' = nx^{n-1}$ でした。$1 = x^0$ の微分は 0 です。

n が負の整数のとき:　$n = -m$ とおくと m は自然数になります。$y = x^n = x^{-m} = 1/x^m$ ですから、商の微分をつかうと、

$$y' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}} = nx^{n-1},\ (x^n)' = nx^{n-1}.$$

すなわち、n が負のばあいもおなじ式が成り立つことがわかります。

n が分数のとき: $n=p/q$ ただし p は整数（負の整数の可能性も含む）q は 1 以上の整数とします。$y=g(x)=x^n=x^{p/q}$ から $g(x)^q=x^p$ となります。$f(x)=x^q$ とすると、$f(g(x))=x^p$ となりますから、この微分を考えると、

$$px^{p-1}=f'(g(x))g'(x)=q(x^{p/q})^{q-1}g'(x)=qx^{\frac{p(q-1)}{q}}g'(x)$$

となります。ここで n が整数のときは、$(x^n)'=nx^{n-1}$ が成り立つことを使っています。$g'(x)$ は分かりませんが、実にそれが求めたいものでした。そこで、

$$(x^n)'=g'(x)=\frac{px^{p-1}}{qx^{\frac{p(q-1)}{q}}}=\frac{p}{q}x^{p-1-\frac{p(q-1)}{q}}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}=nx^{n-1}.$$

これは、$(x^n)'=nx^{n-1}$ が n が有理数（分数で表される数）の時も成り立つことを意味しています。

例 4.3.4

1. $y=\sqrt{x}$ とすると、$y=x^{1/2}$ のことですから、

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となります。

2. $y=\sqrt{x^2+1}$ は、$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1$。$y=f(g(x))$ ですから、上の場合と、合成関数の微分を用いて、

$$y'=f'(g(x))g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. $y=1/(x+3)^2$ のときは、

$$y'=((x+3)^{-2})'=(-2)(x+3)^{-3}=\frac{-2}{(x+3)^3}$$

となります。

4.3.3 対数関数の微分

$(x^n)'=nx^{n-1}$ は n がいろいろな場合に成り立つことが分かりました。ここで 逆に微分して x^n になる関数について考えてみましょう。たとえば、

$$y=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\longrightarrow y'=x^n$$

となっていることが分かります。しかし、うまくいかないところが一箇所あります。それが、$n+1=0$ すなわち、$n=-1$ のところです。すなわち、微分して $x^{-1}=1/x$ になる関数は x^n の n をいくらいろいろな数にしてみても、係数をつけてみても、見つからな

いということです。しかし、すでに知っている関数で微分するとこの関数になるものがあります。実は、

$$y = \log_e x \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$$

となっています。このことを見てみましょう。

log の定義から、

$$x = e^y \longleftrightarrow y = \log_e x$$

でした。ここで $f(x) = \log_e x$ とおくと、$x = e^{f(x)}$ です。この両辺を合成関数の微分をつかって微分すると、

$$1 = (x)' = (e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x) = x f'(x)$$

ですから、

$$f'(x) = (\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

が得られました。

この $\log_e x$ という関数はとても便利なので、数学では e を省いて、$\log x$ と書きます。ほかの自然科学では $\log_{10} x$ も良く使うので、$\log x = \log_{10} x$、$\ln x = \log_e x$ として用いることも良くあります。ここでは、$\log x = \log_e$ と約束しましょう。

例 **4.3.5** $y = \log f(x)$ とすると、

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

4.3.4　x^n の微分再述

$y = x^n$ の微分についてもう一度考えましょう。

$x = e^{\log x}$ となっています。$y = \log x$ とおくと、$\log x = \log_e x$ ですから、$e^y = x$ という意味でした。したがって、最初の式が成り立っています。そこで、

$$f(x) = x^n = (e^{\log x})^n = e^{n \log x}$$

ですから、$h(x) = n \log x$、$g(X) = e^X$ をおくと、$f(x) = g(h(x))$ となっていますから、合成関数の微分を用いると、$h'(x) = n/x = nx^{-1}$ に注意すると、

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = e^{n \log x} \frac{n}{x} = \frac{n}{x} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

となり、$(x^n)' = nx^{n-1}$ が得られました。上の計算では、最初に示した、$x^n = e^{n \log x}$ を用いています。

さて、公式ができましたが、これは、なにかいつでも成立しているようです。何か条件はいりますか。一般的には、$x > 0$ という条件が必要です。しかし、n はすべての実数について成立します。この公式を n が負の場合、分数の場合に証明しましたが、対数関数の微分と、合成関数の微分を用いると、このように一般の実数のの場合に同様の公式を得ることができます。

4.4　微分の応用：関数とグラフ

4.4.1　極限の計算

連続関数の商 $f(x)/g(x)$ の形になっているときの極限について復習しましょう。まず $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ すなわち、分母が 0 にならない時は、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)},\ \text{ if } \lim_{x\to a} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0.$$

また、$\lim_{x\to a} g(x) = 0$ でかつ、$\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ のときは、極限は存在しませんでした。この場合は、さらに無限大 $+\infty$ になるか負の無限大 $-\infty$ になるか、またはどちらにも決まらないかを調べることもありますが、ともかく、この場合は、発散 (diverge) といって、極限が一定の数になりません。

問題なのは、分母も分子も 0 になってしまう場合でした。この場合は、すぐには、極限が決定できません。

さて、前に例で取り上げたものにつぎのようなものがありました。

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-1)}{x-4} = \lim_{x\to 4} x-1 = 4-1 = 3.$$

この問題では、x に 4 を代入すると、分母も分子も 0 になっていました。そこで何らかの手を講じないといけなかったわけです。この場合は、因数分解をすることができ、x は $x \neq 4$ を維持しながら 4 に近づいていくことから、$x-4$ をキャンセルして、求める結果を得ました。

さて、$f(x) = x^2 - 5x + 4$ とすると、$f(4) = 0$ です。そこで、$f'(4)$ の定義を書いてみましょう。

$$f'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x-4}$$

となっています。上で $f(4) = 0$ を使いました。この最後の式は、最初に考えた極限ですから、結局この極限は $f'(4)$ だということになります。微分は簡単に計算できることも多くこの場合も、

$$f'(x) = (x^2-5x+4)' = 2x-5 \ \text{ これより } f'(4) = 3.$$

たしかに答えも同じになりました。

これは偶然でしょうか。連続関数の商の極限で $0/0$ すなわち、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},\ \text{ かつ } f(a) = g(a) = 0$$

の場合を考えましょう。$f(x)$ も $g(x)$ も $x = a$ で微分係数をもつ、すなわち微分可能だとすると、分母・分子を $x-a$ で割り $f(a) = g(a) = 0$ に注意すると、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

となり、この場合も分子・分母をともに微分し $x = a$ での値を求めたものになっています。ですから $g'(a) \neq 0$ ならばこのようにして、極限を求めることができます。さらに、$f(x)$ も $g(x)$ も $x = a$ で何回も微分することが可能だとすると（例えば多項式などはそうですが）導関数も連続ですから、

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

すなわち、分子・分母を微分しそれについて、考えれば良いことがわかります。そう考えると、最初の問題も、$f(x) = x^2 - 5x + 4$ などとおかなくても、

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{(x - 4)'} = \lim_{x\to 4} \frac{2x - 5}{1} = 3.$$

とすることができることがわかります。

因数分解を考えないですむメリットがあります。しかし、0/0 の形であることを確かめることは必要です。

（証明を、少し工夫すると、$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$、$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ の場合も、同様のことが言えます。）

例 **4.4.1**　1. まず分子・分母がともに 0 に近づくことを確認して下さい。

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^3 - 8)'}{(x^2 - x - 2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{2x - 1} = \frac{12}{3} = 4.$$

2. これも分子・分母がともに 0 に近づく場合ですが、微分をとっても分子・分母がともに 0 に近づくのでもう一度微分をとります。

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 4x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x - 4} = \frac{6}{2} = 3.$$

3. 次の例は分子が 0 に近づかないので、極限が存在しないのですが、微分をとると違うものになってしまう例です。

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \neq \lim_{x\to 1} \frac{2x - 1}{1} = 1$$

4. 次の例は分母が 0 に近づかないので、普通に極限がわかるのですが、微分をとると違うものになってしまう例です。

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{-2}{2} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 1} \frac{2x - 1}{1}.$$

5. $e^0 = 1$、$(e^x)' = e^x$ でした。つぎの例は、0/0 型ですから分母・分子を微分して求めることができます。

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} = \frac{e^x}{1} = 1.$$

ただこの極限は、e^x の微分を求める時に使ったものでした。ここで微分を使うのは、問題ですが、実際にいろいろな場面で、この微分を使う極限の計算はとても便利です。

6. 三角関数などを含む難しいものに適用すると非常に効果的です。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

このばあいは、一回の微分では、決定できず、また 0/0 となっているので、もう一度微分、さらにもう一度と何回も微分して、分母が 0 ではなくなってから求めています。もう一回微分するとおかしなことになります。あくまでも 0/0 の場合に適応できるものでした。

4.4.2 極大・極小

定義 4.4.1 点 x が、点 a に十分近いときは、常に、$f(a)>f(x)$ が成り立つとき、$f(x)$ は、$x=a$ で、極大になるといい、$f(a)$ をその極大値、点 a を、極大点という。同様にして、点 x が、点 a に十分近いときは、常に、$f(a)<f(x)$ が成り立つとき、$f(x)$ は、$x=a$ で、極小になるといい、$f(a)$ をその極小値、点 a を、極小点という。極大値と極小値を合わせて極値という。

極大・極小は最大・最小とは違います。局地的に見るとその当たりでは一番山のてっぺん、または谷底と言う意味です。

命題 4.4.1 $f(x)$ が連続、かつ微分可能とする。このとき次が成立する。

(1) $x=c$ で極値（極大または極小値）を持てば、$f'(c)=0$。

(2) $f'(c)>0$ ならば、$f(x)$ は $x=c$ で増加。

(3) $f'(c)<0$ ならば、$f(x)$ は $x=c$ 減少。

(4) 常に $f'(x)=0$ ならば、$f(x)$ は定数関数。

証明. 次のことを思い出しましょう。

$$h(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\begin{cases} >0; & x<c \text{ かつ } f(x)<f(c) \text{ の時： 増加}\\ >0; & c<x \text{ かつ } f(c)<f(x) \text{ の時： 増加}\\ <0; & x<c \text{ かつ } f(x)>f(c) \text{ の時： 減少}\\ <0; & c<x \text{ かつ } f(c)>f(x) \text{ の時： 減少}\end{cases}.$$

(1) $f(c)>f(x)$ すなわち、c で極大のときは、x が左から c に近づき c を通り過ぎるとすると、増加から減少に変わるわけですから、上の四つのケースのうち、1 番目と 4 番目が起こりますから、$h(x)$ は $x<c$ のとき正、$c<x$ の時負。したがって、$\lim_{x\to c}h(x)$ は存在するとすると、0 以外にはなり得ません。この極限が $f'(c)$ でしたから $f'(c)=0$ となります。$f(c)<f(x)$ すなわち、c で極小のときも同様です。考えてみて下さい。この場合は、2 番目と 3 番目が起こります。

(2) この場合は、x が c に近いところでは、$h(x) > 0$ となっているわけですから、1 番目と 2 番目が起こっています。すなわち増加していることがわかります。

(3) 上と同様にしてわかります。

(4) 増加も減少もしていないことがわかりますので、一定になっています。そのような関数を定数関数といいます。■

$f'(x)$ の増加、減少は、$f'(x)$ の導関数 $f''(x)$（$f'(x)$ をもう一度微分した、$(f'(x))'$ をこのように書く) によって分かることを考えれば、次のことが分かります。

命題 4.4.2 $f(x)$ は 2 回微分可能な関数とする。このとき次が成立する。

(1) $f'(c) = 0$、$f''(c) < 0$ ならば、関数 $f(x)$ は、c で極大値 $f(c)$ を持つ。

(2) $f'(c) = 0$、$f''(c) > 0$ ならば、関数 $f(x)$ は、c で極小値 $f(c)$ を持つ。

証明. (1) $f'(c) = 0$ かつ $f''(c) < 0$ とする。$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数ですから、$f''(c) < 0$ ということは、$f'(x)$ は $x = c$ において減少していることがわかります。減少して $f'(c) = 0$ ということは、$x = c$ を境にして、$x < c$ では $f'(x) > 0$、$x > c$ では $f'(x) < 0$ となっています。つまり、$x < c$ で x が c に近づいてくるとき（すなわち c に左から近づいてくるとき）は $f(x)$ は増加しており、$x = c$ をすぎて $x = c$ から遠ざかっていくときは減少していることを意味しています。これは、$x = c$ で $f(x)$ は極大値をとることを意味します。

(2) 同様です。証明を考えてみてください。■

例 4.4.2 関数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$ がどこで極大・極小になるかを考えましょう。命題 4.4.1 (1) によって、極大または極小になる点では、導関数の値が 0 になるわけですから、まず $f'(x)$ を求めます。さらに、$f'(x) = 0$ となる点で、極大になるのか、極小になるのか、どちらでもないかを判断するため、$f''(x)$ を計算しておきます。

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2),\ f''(x) = 12x^2 - 16.$$

この計算から $f'(x) = 0$ となるのは $x = -2, 0, 2$ です。それぞれの x での $f''(x)$ の値は、$f''(-2) = 32 > 0,\ f''(0) = -16 < 0,\ f''(2) = 32 > 0$ となりますから、命題 4.4.2 より $x = -2$ で極小値 $f(-2) = -6$、$x = 0$ で極大値 $f(0) = 10$、$x = 2$ で極小値 $f(2) = -6$ をとることがわかります。表に書くと次のようになります。

x		-2			0			2	
$f(x)$	↘	極小	↗	↗	極大	↘	↘	極小	↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
		↗			↘			↗	
$f''(x)$		$+$			$-$			$+$	

$f'(c) = 0$ で $f''(c) = 0$ ならばどうでしょうか。この場合は、この方法では判定できませんがさらに、$f'''(c)$ を調べて、これが正の場合には同様の考え方で $f(x)$ は $x = c$ で増加していることがわかります。負の場合には減少しています。したがって、極値をもちません。すなわち、極大にも、極小にもなっていません。$f(x)$ が何回でも微分可能な時は、そこでの値が 0 にならないところまで微分をしそこから出発すると、$x = c$ で増加しているか、減少しているか、極大か、極小か判断することができます。

例 4.4.3 関数 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$ がどこで極大・極小になるかを考えましょう。まず $f'(x)$ を求めます。さらに、$f'(x) = 0$ となる点で、極大になるのか、極小になるのか、どちらでもないかを判断するため、$f''(x)$ を計算しておきます。

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2 = 2(x-1)^2(2x+1),\ f''(x) = 12x^2 - 12x.$$

$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数、すなわちこれを微分したものです。因数分解したものを積の微分をつかって微分することもできますが、ただ導関数が必要な時は、展開してあるもとの式を微分したほうが簡単です。この計算から $f'(x) = 0$ となるのは $x = -1/2, 1$ です。それぞれの x での $f''(x)$ の値は、$f''(-1/2) = 9 > 0,\ f''(1) = 0$ となりますから、$x = -1/2$ で極小値をとることがわかりますが、$f''(1) = 0$ ですから $x = 1$ では、極大か極小か増加しているのか減少しているのかこれではわかりません。そこでもう一度微分してみると $f'''(x) = 24x - 12$ ですから $f'''(1) = 12 > 0$ です。$f'''(x)$ は $f''(x)$ を微分したものでした。導関数の値が正なのですから、$f''(x)$ は $x = 1$ で増加しておりかつ $f''(1) = 0$ ですから、x に近いところでは、$x < 1$ では $f''(x) < 0$ 、$x > 1$ では $f''(x) > 0$ であることがわかります。すなわち、$f'(x)$ は $x < 1$ では減少、$x > 1$ では増加です。$f'(1) = 0$ ですから、$x < 1$ では $f'(x) > 0$ かつ $x > 1$ では $f'(x) > 0$ すなわち、$f(x)$ は c の近くではいつでも増加していることがわかります。したがって極大でも極小でもありません。表に書くと次のようになります。

x		$-1/2$			1	
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\nearrow$	増加	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$f''(x)$		$+$		$-$	0	$+$
					$\nearrow$	
$f'''(x)$					$+$	

定義 4.4.2 関数 $f(x)$ が、点 c において、接線を持ち、c のごく近くで、$f(x)$ のグラフが、接線の上にあれば、$f(x)$ は、点 c において、下に凸、接線の下にあれば、上に凸という。$f(x)$ のグラフが、接線の上から下、又は、下から上に移るとき、この点を、変曲点という。

命題 4.4.3 $f(x)$ が、開区間 (a, b) において、２階導関数 $f''(x)$ を持てば、次が成立。

(1) $f''(x) > 0$ ならば、$f(x)$ は、開区間 (a, b) で、下に凸。

(2) $f''(x) < 0$ ならば、$f(x)$ は、開区間 (a, b) で、上に凸。

(3) $f''(c) = 0$ かつ、$f''(x)$ の符号（正であるか、負であるか）が点 c で変われば、$x = c$ は、変曲点。

4.4.3 L'Hospital の定理

不定形の極限を求めるのに、次の定理は有効です。

命題 4.4.4 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能で、$g'(x) \neq 0$ ならば、次が成立する。

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

もう少し正確には、命題の右辺の極限が存在すれば、左辺の極限も存在して等しい、ということです。

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \ \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

の場合には、次のようになります。

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

証明には、平均値の定理が必要ですが、特別な場合だけ証明してみましょう。

$$\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a), \ \lim_{x \to a} g'(x) = g'(a) \neq 0$$

の場合です。この時は、命題の右辺は、$f'(a)/g'(a)$ となりますから、次の式を示せば良いことになります。

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

左辺は、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ですから、右辺と同じになります。

例 4.4.4 1. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2}{2x - 3} = 12.$

2. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$

どちらの場合も、0/0 の不定形であることを確認して下さい。そうでないと、命題が使えません。たとえば、後の問題の最後から 2 番目の式の分母・分子微分すると、$e^x/0$ となってしまい、極限が素材しないことになってしまいます。

最初の問題は、組み立て除法を用いて、因数分解しても計算できますが、あとのほうは、公式を知っているか、または、このような方法を用いないと、求められません。因数分解は、多項式についてのものです。

4.5 不定積分と定積分

4.5.1 原始関数と不定積分

定義 4.5.1 関数 $F(x)$ の導関数が、$f(x)$ に等しいとき、すなわち、$F'(x) = f(x)$ が成り立つとき、$F(x)$ を、$f(x)$ の原始関数と言う。

$F(x)$、$G(x)$ を共に、$f(x)$ の原始関数とする。すると、$F'(x) = G'(x) = f(x)$ であるから、$(F(x)-G(x))' = 0$ となる。導関数が、常に、0 となる関数は、命題 4.4.1 (4) によって、定数となる。従って、$G(x) = F(x)+C$ なる定数 C が存在する。逆に、$G(x) = F(x)+C$ と表せる関数は、$f(x)$ の原始関数である。このことをふまえ、原始関数の代表という意味で、$f(x)$ の不定積分と呼び、次のように書く。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ここで、C を積分定数と言う。(C を省略して書くことも良くある。)

例 4.5.1 $f'(x) = 2x+1$、$f(0) = 2$ となる関数を考えるとする。x^2+x の導関数は $2x+1$ だから $f(x) = x^2+x+C$ と書けます。$f(0) = 2$ だから $C = 2$ となり、$f(x) = x^2+x+2$ を得、一つの関数が決まります。

例 4.5.2 $(x^n)' = nx^{n-1}$ がすべての数について成立しました。ただし、$n = 0$ のときは、$1' = 0$ です。これを用いるといろいろな関数の原始関数がもとまります。

1. $\displaystyle\int 3x^2dx = x^3 + C$
2. $\displaystyle\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4 + C.$
3. $\displaystyle\int 8x^3 - 3x^2 + 2dx = 2x^4 - x^3 + 2x + C.$

例 4.5.3 一回微分して 0 になる関数は定数でした。二回微分して(微分したものをもう一度微分して 0 になる関数は定数関数の原始関数ですから一次関数であることがわかります。$D^m f(x)$ で $f(x)$ を m 回続けて微分したものを表すとすると、$D^m f(x) = 0$ ならば $f(x)$ は $m-1$ 次の多項式であることがわかります。

$$D^m f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ は次数 } m-1 \text{ の多項式}$$

$\Leftarrow$ は微分をすれば $(x^n)' = nx^{n-1}$ からわかります。逆の $\Rightarrow$ は $f'(x) = 0$ なら $f(x) = c$ ということと、$(x^n)' = nx^{n-1}$ からわかります。こちらは積分の考え方です。

前に似たものがありました。$\Delta^m f(x) = 0$ なら $f(x)$ は次数 $m-1$ の多項式で表すことができるというものでした。似ていますね。数学では似た部分を見て、一方で成り立つことがここでも成り立たないか考えたり、さらにもう一段上に統一理論がないかを考えたりします。

例 4.5.4　1. $\int e^x dx = e^x + C$

2. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\ (\text{ if } \alpha \neq -1)$

3. $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

4. $(\int \sin x dx = -\cos x + C)$

5. $(\int \cos x dx = \sin x + C)$

練習問題 4.5.1　1. $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x}$

2. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

3. $\int (x^2 - 2e^x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2e^x + C$

4. $\int (6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = 4x^{3/2} - 2x^{1/2} + C = 4x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$

5. $(x^2e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1) = (2-x)xe^{-x}$ だから、
$\int (2-x)xe^{-x}dx = x^2e^{-x} + C$

6. $(\int (4\sin x + \cos x)dx = -4\cos x + \sin x + C)$

4.5.2　不定積分の計算

置換積分　$F'(x) = f(x)$ であるとすると、$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = f(\phi(t))\phi'(t)$ であるから、$x = \phi(t)$ とおいたときは、

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

となる。

例 4.5.5　1. $\frac{d}{dt}\phi(t)^\alpha = \phi(t)^\alpha\phi'(t)$

$\int \phi'(t)(\phi(t))^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}(\phi(t))^{\alpha+1} + C,\ (\text{ if } \alpha \neq -1)$

(a) $\int (5x+2)^{10}dx = \frac{1}{55}(5x+2)^{11} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = 2\sqrt{x-2} + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+1)^5}dx = \frac{-1}{12(x^3+1)^4} + C$

2. $\displaystyle\frac{d}{dt}e^{\phi(t)} = e^{\phi(t)}\phi'(t)$

$\displaystyle\int \phi'(t)e^{\phi(t)}dt = e^{\phi(t)} + C$

練習問題 4.5.2 以下の問題 1–4 においては、まず y の微分を考えよ。後の問題については、y として何を考えたら良いだろうか。

1. $y = (3x-2)^7$, $\displaystyle\int (3x-2)^6 dx$

2. $y = (x^3+2)^5$, $\displaystyle\int x^2(x^3+2)^4 dx$

3. $y = \left(x - \frac{2}{x}\right)^6$, $\displaystyle\int \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^5 dx$

4. $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$, $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^4}dx$

5. $\displaystyle\int (x^4+3x)^{30}(4x^3+3)dx$

6. $\displaystyle\int (x^3+6x)^5(6x^2+12)dx$

7. $\displaystyle\int (x^2+4)^{10}xdx$

8. $\displaystyle\int (\frac{x^2}{2}+3)^2 x^2 dx$

4.5.3 定積分と微積分学の基本定理

微分の逆演算としての原始関数、不定積分について学びました。これは、微分は関数 $f(x)$ が与えられた時、$f'(x)$ を計算するものでした。$f(x)$ の原始関数は微分したら $f(x)$ になるような関数のことでした。$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると、$F'(x) = f(x)$ でした。これは、微分方程式を解くというような時に用いることができ、物理学の発展とともに整備されてきたものでした。積分にはもう一つのルーツがあります。それは、曲線で囲まれた面積をもとめるということです。多角形までは、どうにかなりますが、曲線で囲まれた図形のばあいは、段々近付けていくという極限の考えがどうしても必要です。そこで次のようなものを考えます。

定義 4.5.2 関数 $f(x)$ が、区間 $[a,b]$ で連続であるとする。分割 $\Delta=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ と実数 $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ の集合 $\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ に対して、

$$R_{\Delta,\{t_i\}}(f)=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

を、リーマン和又は、積和という。分割 Δ を限りなく細かくしていくとき、(すなわち、

$$|\Delta|=\max\{|x_i-x_{i-1}|\mid i=1,2,\ldots\}$$

が、0 に近づくようにとっていくとき) $R_{\Delta,\{t_i\}}(f)$ が、$\{t_i\}$ の取り方に関係なく一定の実数 I に近づく。この I を $[a,b]$ 上 $f(x)$ の定積分と言い、

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

と書く。このことを記号的に、次のようにも書く。

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

例 4.5.6 たとえば $y=f(x)=x^2$ と x 軸と $x=1$ で囲まれた部分の面積を考えましょう。これは、つぎのように表すことができます。

$$\int_0^1 x^2dx$$

しかし、これを定義通り求めることができるでしょうか。

命題 4.5.1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は、区間 $[a,b]$ で連続であるとする。このとき、次が成り立つ。

(1) $\displaystyle\int_a^b(f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$。

(2) $\displaystyle\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$、($k$ は、定数。)

(3) $a\le x\le b$ で、$f(x)\ge g(x)$ ならば、$\displaystyle\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$。

命題 4.5.2 (積分の平均値の定理) 関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば、ある、$c\in(a,b)$ で、

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$$

を満たすものがある。

証明. 関数 $f(x)$ は、閉区間 $[a,b]$ で連続だから、最大、最小をとる。最大値を M 最小値を m とすると、リーマン和の定義から、

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

これより、m と、M の間のある値 A で、

$$m(b-a) \leq A = \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

となる。$f(x)$ は、連続だから、中間値の定理により、m と、M の間の値は全てとる。従って、$f(c) = A$ を満たす $a < c < b$ を満たす c が存在する。これは、命題の、条件を満たすものである。 ■

$a < b$ のとき、

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \int_a^a f(x)dx = 0$$

と定義する。こう定義すると、b を変数とみなして、関数

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

が定義できる。実は、こうすると、$x = a$ で、$F(x)$ が、連続であることが分かる。さらに、次が成り立つ。

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^x f(x)dx$$

定理 4.5.3 (微積分学の基本定理) 関数 $f(x)$ が、閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする。

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

とすると、$F(x)$ は、閉区間 (a,b) で、微分可能であり、$F'(x) = f(x)$ が成立する。

証明. $a < c < b$ とする。

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(c)}{x-c} &= \frac{\displaystyle\int_a^x f(x)dx - \int_a^c f(x)dx}{x-c} \\ &= \frac{\displaystyle\int_c^x f(x)}{x-c} \\ &= f(d(x))\end{aligned}$$

を満たす、点、$d(x)$ が、x と c の間にある。従って、$f(x)$ が、連続なことを考えると、

$$F'(c) = \lim_{x\to c} \frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} f(d(x)) = f(c)$$

これより、$F'(x) = f(x)$ を得る。 ■

さて、一般に、$F(x)$ を 関数 $f(x)$ の原始関数。すなわち、$F'(x) = f(x)$ を満たすものとする。すると、微分積分学の基本定理より、$\int_a^x f(x)dx$ も $f(x)$ の一つの原始関数だから、ある、定数 C が、存在して、

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + C$$

と書ける。$x = a$ とおくと、$F(a) = C$ を得るから、$x = b$ とおくと、

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$$

特に、

$$\int_a^x f(x)dx = F(b) - F(a)$$

を得る。これを、

$$\int_a^x f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x) \mid_a^b$$

ともかく。

例 4.5.7

$$F(x) = \int_0^x t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = \frac{1}{3}x^3.$$

たしかにこれを微分すると、微分積分学の基本定理により x^2 になります。また $x = 1$ とすると、上で考えた面積がわかります。

例 4.5.8 $f(x) = e^{x^2}$ の原始関数みなさんの知っている関数では書けないことが知られていますが、

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{t^2} dt$$

とおくと、$F(x)$ は計算できませんが、$F'(x) = f(x) = e^{x^2}$ となっています。$f(x)$ の部分がもっと難しい関数でも同じです。

練習問題 4.5.3 次の計算をせよ。

1. $\displaystyle\int_1^2 (3x^2 + 5)dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 (2x^2 + x)dx$
3. $\displaystyle\int_1^3 (3x^{-2} + x^{-3})dx$

4. $\displaystyle\int_0^2 t(t^2-3)dt$

5. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx$

6. $\displaystyle\int_0^1 2e^x dx$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{5}{2}e^{4x}dx$

8. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{5t^2+4}\,dt$

4.6 微分方程式

関数 $y=f(x)$ の導関数 $y'=f'(x)$（または、y'', y''' などの高階導関数）が含まれる方程式を微分方程式 (differential equation) と言う。その中でも基本的でかつ応用例も多い分離型 (separable differential equation) についてのべる。

$y=f(x)$ とするとき、y の導関数を dy/dx と書くことがある。微分方程式は、$y=f(x)$ を求めることが目的である。この表記を用いて、まず簡単な例から。

$$\frac{dy}{dx}=g(x).$$

これも、微分方程式の一つ。$G(x)$ を $g(x)$ の原始関数の一つとすると、上の方程式では、$y=f(x)$ も、$G(x)$ もどちらも $g(x)$ の原始関数なので、$y=f(x)=G(x)+C$ と書けるはずである。しかし、これだけでは、C が残っているので、$f(x)$ が決まらない。そこで、初期条件と言われる、条件を与える。たとえば、$f(0)=0$。すると、$0=f(0)=G(0)+C$ より $C=-G(0)$ となり、$y=f(x)=G(x)-G(0)$ を得る。

例 4.6.1 時刻 t の時のある（質量 m の）物体の高さを $y=h(t)$ で表すとする。その時刻 t における速度 $v(t)$ は、$v(t)=y'=h'(t)$ で与えられる。 速度 $v(t)$ の時刻 t における変化率を加速度といい $\alpha(t)$ で表す。すなわち、$\alpha(t)=v'(t)=y''=h''(t)$。さて、ここで、ニュートンの運動方程式 $F=m\cdot\alpha$ が成り立つ。 F はその物体に働く力である。時間に関係した力なら、$F(t)=m\cdot\alpha(t)$ となる。簡単のために、この物体には重力だけが働いているとすると、重力加速度を $g=9.8m/s^2$ とすると、力が下向きなので、$F=-m\cdot g$。すなわち、$\alpha(t)=-g$。さて、$v'(t)=\alpha(t)=-g$ だから $v(t)=-gt+C$ となる。この場合は、$t=0$ とすると、$v(0)=C$。これは、時刻 0 の時の速度だから、初速度と言われる。そこで、 $C=v_0$ と置く。$v(t)=-gt+v_0$。さて、$v(t)=y'=h'(t)$ だったから、$h'(t)=-gt+v_0$ である。従って、$h(t)=-(g/2)t^2+v_0t+C$ となる。ここで $t=0$ とすると、$h(0)=C$ となるので、C は、時刻 0 の時の物体の高さ h_0 である。

二つの微分方程式が出てきた。$v'(t) = -g$ と、$h'(t) = -gt + v_0$ である。それぞれの解は、$v(0) = v_0$, $h(0) = h_0$ とすると、$v(t) = -gt + v_0$, $h(t) = -(g/2)t^2 + v_0 t + h_0$。

高さ $10m$ の飛び込み台から初速度 0 で飛び降りたとき、t 秒後の高さは、$h(t) = -4.9t^2 + 10$。従って、大体 $\sqrt{2} \sim 1.4$ 秒後には、高さ $0.2m$ すなわち、20cm のところにいることになる。

命題 4.6.1 $H(x)$ を 関数 $h(x)$ の原始関数、$G(y)$ を 関数 $g(y)$ の原始関数とする。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)} \quad \text{ならば} \quad G(y) = H(x) + C \text{ が成立する。}$$

証明. $y = f(x)$ とすると、$G(y) = G(f(x))$ である。これを x で微分すると、合成関数の微分から

$$(G(f(x)))' = G'(y)f'(x) = g(y)y' = h(x) = H'(x)$$

だから $G(y) = G(f(x)) = H(x) + C$ が成立する。 ■

この命題は、微分方程式を、形式的に $g(y)dy = h(x)dx$ と変形し、$\int g(y)dy = \int h(x)dx$ と積分した結果が等しいことを主張している。上記の形の微分方程式を分離型という。

例 4.6.2 y で、時刻 x における個体数（例えば 人口） (population) を表すとする。

$$(1)\ \frac{dy}{dx} = ky, \qquad (2)\ \frac{dy}{dx} = k(N-y), \qquad (3)\ \frac{dy}{dx} = \frac{k}{N}(N-y)y, \qquad k \text{ はいずれも定数}$$

通常何の制限もないと (1) の関係があるとされる。ここで k は出生率と死亡率の差である。実際には、ある空間を限定すると、そこで生きられる個体数には上限がある。これを、人口扶養力 (carrying capacity) などといい N で表す。この限界に近いと、上の関係式 (2) に従うとされている。一般には、これらをあわせた (3) が適切であるとされ、ロジスティック・モデルと呼ばれる。ここでいうロジスティック（logistic）は、もともとは、兵站（へいたん＝戦争の際の物資の補給）から来ている。いずれも、分離型である。

$$kx + C = \int k dx = \int \frac{N}{(N-y)y} dy = \int (\frac{1}{y} + \frac{1}{N-y}) dy = \log y - \log(N-y) = \log(\frac{y}{N-y})$$

$x = 0$ のときの y の値を y_0 とおくと、$e^C = y_0/(N-y_0)$。これより、次の式を得る。

$$e^{kx+C} = \frac{y}{N-y},\ y = \frac{N}{1+e^{-kx-C}} = \frac{N}{1+be^{-kx}} \quad b = \frac{N-y_0}{y_0} = e^{-C}.$$

練習問題

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2x = 3x^2, \quad y = 2$ when $x = 0$
   $y = x^3 - x^2 + 2.$

2. $x\dfrac{dy}{dx} - y\sqrt{x} = 0, \quad y = 1$ when $x = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y}, \quad y = 3 \text{ when } x = 0$
   $y^2 = 2x^3/3 + 9.$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+5}{2y-1}, \quad y = 11 \text{ when } x = 0$

5. $\dfrac{dy}{dx} = (2x+3)y, \quad y = 1 \text{ when } x = 0$
   $y = e^{x^2+3x}.$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+1}{y-3}, \quad y = 4 \text{ when } x = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 - 3x^2 + x, \quad y = 0 \text{ when } x = 1$
   $y = x^4 - x^3 + x^2/2 - 1/2.$

8. $x^2\dfrac{dy}{dx} = y, \quad y = -1 \text{ when } x = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x}, \quad y = 5 \text{ when } x = e$
   $y = -5/(5\log|x| - 6).$

10. $\dfrac{dy}{dx} = x^{1/2}y^2, \quad y = 12 \text{ when } x = 4$

11. $\dfrac{dy}{dx} = (y-1)^2e^{x-1}, \quad y = 2 \text{ when } x = 1$
    $y = (e^{x-1} - 3)/(e^{x-1} - 2).$

12. $\dfrac{dy}{dx} = (x+2)e^y, \quad y = 0 \text{ when } x = 1$

4.7 お茶の時間

4.7.1 指数関数の身近な例

1. 10^7m 地球の直径、$10^{25}m$ 銀河団、$10^{27}m = 1000$ 億光年 宇宙の果て。

2. 1 等星は、2 等星の 2.51 倍の明るさ、2 等星は、3 等星の 2.51 倍の明るさ、3 等星は、4 等星の 2.51 倍の明るさ、4 等星は、5 等星の 2.51 倍の明るさ、5 等星は、6 等星の 2.51 倍の明るさ、したがって、1 等星は、6 等星の 99.63 倍の明るさ。

3. 音の大きさ：60 ホンは、エネルギーに勘算すると、70 ホンの 10 分の 1、80 ホンの 100 分の 1 。

4. マグニチュードは、1 違うとエネルギーは 32 倍。マグニチュード 6 は広島型の原子爆弾およそ 1 個のエネルギーと同じ。阪神大地震 マグニチュード 7.2. $32^{1.2} = 64$。

   「1995 年 1 月 17 日朝 5 時 46 分に起こった阪神・淡路大震災はマグニチュード 7.2 で、伊勢湾台風の死者数を上回る戦後最大の災害となりました。　この大震災のエネルギーは広島原爆の 67 発分です。　広島原爆は日本人にとって巨大な破壊力の象徴のようなものですが、その 67 倍ですから、阪神大震災の破壊エネルギーがいかに大きかったかを示しています。なお、1923 年の関東大震災は阪神大震災の 11 倍、広島原爆の 750 発分でした。火災を中心に死者 10 万人を数え、阪神大震災も 5500 人余りの犠牲を生み出しました。

   しかし、広島原爆は阪神大地震のエネルギーの 67 分の 1 の小ささであったにもかかわらず、死者数は 30 倍を超えています。広島原爆は 1945 年 8 月 6 日朝 8 時 15 分に投下されてから、その年の内だけで 13〜15 万人、そして放射線後遺症などで亡くなった人を含めると約 20 万人が生命を失っています。　これは明らかに地震は人を殺す目的で起こるわけではないけれども、核兵器は人を能率よく殺す意図を持って、条件を選んで使われるからにほかならないのです。」(安斎　育郎（立命館大学教授・国際平和ミュージアム館長）http://www.ask.ne.jp/~hankaku/html/anzai.html)

5. 科学の世界、特に、生物の世界では、指数的な関数が非常によく現れます。$f(x) = e^{ax}$ というような形のものです。すると、$\log f(x) = ax$ となりますから、対数をとると比例する関係になっています。細胞分裂などを考えても、二つずつに分かれていくことなどを見ても、自然な気がします。そこで、データを log をとって、表すことがよくあります。

6. 「人間の感覚は刺激（エネルギー）の強さの対数に比例する。」

$$(\text{感じる刺激の強さ}) = c \cdot \log\ (\text{刺激のエネルギー強さ})$$

   (心理学の Weber の法則)
   例：「2 倍の欲望を満たすには、10 倍の刺激が必要。」（これほんと？）上の理解が正しいと、「刺激のエネルギーが 2 乗になると、感じる刺激の強さが倍になる。」

7. 「トイチ」（10 日で 1 割）$(1.1)^{36} = 30.91268\ldots$：トイチでお金を借りると、1 年後には、31 倍になっています。
   「トサン」（10 日で 3 割）$(1.3)^{36} = 12646.21855\ldots$：トサンだと 12646 倍。このぐらいになると、借りた方も借りる方もいくらになったか計算できませんね。

8. 必ず b 倍以上の配当金のある賭けに、前回の掛金の r 倍ずつ賭けていき、一回勝ったら止める。もし、$b \geq r/(r-1)$ が満たされていれば必ず儲かる。

   最初の掛金を a 円とし、n 回目で勝ったとする。

$$a(1 + r + \cdots r^{n-1}) = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} < \frac{ar^n}{r-1} = ar^{n-1}\frac{r}{r-1} \leq b \cdot a \cdot r^{n-1}.$$

$$100(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) = 100 \times 127 = 12,700$$

「頭脳の数的リストラクション 思考力をつける 数学」深川和久（ふかがわやすひさ）著、永岡書店 (ISBN4-522-42098-6, 2002.11.10）を参照。

コンピュータ関連の仕事をしている友達が税金のとり方の提案をしていた。消費税はそれぞれのお札を使うことで支払うことにする。

1K 円札、1M 円札、1G 円札、... というのはどうだろうか。消費税が 3% 時代の話しですが。

$$1K = 2^{10} = 1,024,\ 1M = 2^{20} = 1,048,576,\ 1G = 2^{30} = 1,073,741,824$$

たとえば、1000 円のもののときは、$1K$ 円札ではらう。すると、24 円、税金を払うことになる。100 万円以上のものを買う時は、$1M$ 円札を使う。すると、税率は 4.9% になる。多少累進課税になりますが、税率を変えるときは、もう大変。

4.7.2 マグニチュードに関する問題

問題： 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギー E の（2 を底とする）対数 ($\log_2$) をとった値の一次関数 （$c \cdot \log_2 E + b$ の形）で表される。また、$M6$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当し、エネルギーが 2 倍になると、マグニチュードが 0.2 増加する。マグニチュードが x の地震は、広島型原爆 n 個分のエネルギーに相当するとして、 n を x で表す式を求めよ。ただし n は整数でなくても良いものとする。

まず、この問題の仮定を整理してみましょう。

地震のエネルギーを E、その地震のマグニチュードを m とすると

$$m = c \log_2 E + b \quad c,\ b \text{ は定数} \tag{4.18}$$

と表されます。特に、広島型の原子爆弾のエネルギーを E_a とすると（Atomic Bomb なので、a とつけました)、そのマグニチュードが 6 なので、上の式に代入すると

$$6 = c \log_2 E_a + b. \tag{4.19}$$

次に、エネルギーが 2 倍、すなわち $2 \cdot E$ になると、マグニチュードが 0.2 増え $m + 0.2$ になるので、

$$\begin{aligned}
m + 0.2 &= c \log_2 2 \cdot E + b \quad (\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y \text{ (Proposition 6.6 (i)) を用いると)} \\
&= c(\log_2 2 + \log_2 E) + b \quad (2^1 = 2 \text{ だから } \log_2 2 = 1)) \\
&= (c \log_2 E + b) + c \qquad \text{（ここで (4.18) を用いると）} \\
&= m + c
\end{aligned}$$

だから、最初と最後を比べると $c = 0.2$ がわかります。（ここまではクラスで示しておきました。）

最後に、エネルギーが広島型の原爆 n 個分、すなわち $n \cdot E_a$ のときのマグニチュードが x だから (4.18) に代入すると

$$\begin{aligned} x &= c\log_2 nE_a + b \quad （\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y \text{ (Proposition 6.6 (i))} を用いると） \\ &= c\log_2 n + c\log_2 E_a + b \qquad （ここで (4.19) を用いると） \\ &= c\log_2 n + 6 \qquad （上で求めた c = 0.2 を用いると） \\ &= 0.2\log_2 n + 6. \end{aligned}$$

ここで、$\log_2 n$ について解くと

$$\log_2 n = (x-6)/0.2 = 5(x-6)$$

だから、これより、$y = \log_2 n \Leftrightarrow n = 2^y$ に注意すると、

$$n = 2^{5(x-6)} = (2^5)^{(x-6)} = 32^{x-6}.$$

ちょっと難しかったかな。でも、このように公式ができました。阪神・淡路大地震はマグニチュードが 7.2（あとでも書くように 7.3 とも言われている）でしたから、$2^{5(7.2-6)} = 2^6 = 64$。広島型原爆 64 個分のエネルギーです。スマトラ沖地震はマグニチュード 9.0 だから、$2^{5(9-6)} = 2^{15} = 32768$ となります。よく、小さな地震が時々あった方がよいなどという人がいますが、スマトラ沖地震のエネルギーを放出するには、阪神・淡路大地震級の地震が、$32768/64 = 2^{15}/2^6 = 2^9 = 512$ 回ないといけません。これはたまりません。なかなかこれだけのエネルギーの放出はおおごとです。

最後に、マグニチュードが 0.1 増えるとエネルギーは何倍になるか考えてみましょう。マグニチュード 6 から 0.1 増えると、広島型原爆の $2^0.5 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.4142\ldots$ 倍になります。$x + 0.1$ のときも

$$2^{5(x+0.1-6)} = 2^{5(x-6)+\frac{1}{2}} = 2^{5(x-6)}2^{\frac{1}{2}} = 2^{5(x-6)}\sqrt{2} = n \cdot \sqrt{2}$$

ですからいつでもエネルギーは $\sqrt{2}$ 倍となります。つまり、マグニチュードが 0.1 増えると、エネルギーは $\sqrt{2}$ 倍になります。上でも書きましたが、$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ でした。きっちりと整数倍にならないこともあるので、「ただし n は整数でなくても良いものとする。」と予防線を張ってあります。

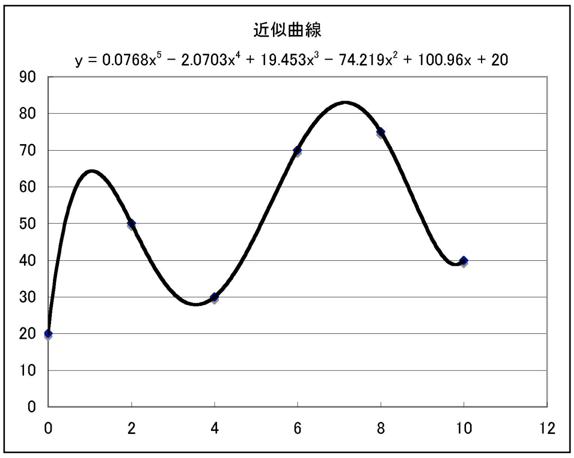
最後に、朝日新聞の記事を引用しておきます。

> 米地質調査所は、インドネシアのスマトラ島沖で２６日に起きた地震の規模をマグニチュード（M）８．９としていたが、約１．４倍の規模の９．０に修正した。１９００年以降では、５２年にロシア・カムチャツカで発生した地震と並んで４番目の規模で、６４年のアラスカでの地震（M９．２）以降で最大。９５年の阪神大震災（M７．３）の約３６０倍のエネルギーが放出されたことになる。 (www.asahi.com 04/12/27)

4.7.3 表計算ソフト Excel を使ってみよう

表計算ソフトは Excel 以外にも何種類もありますが、ここでは、Excel を使って、多項式近似、そして微分・積分について考えて見ようと思います。Excel は Microsoft Office に含まれていますが、使ったことはありますか。
まずデータが必要です。右の表を考えます。これを入力してみて下さい。次に、この表の部分を選択。[挿入] から [グラフ...] を選ぶか、ツールバーのグラフを選びます。いろいろな絵が出てきますが、そこで、[散布図] を選ぶ。散布図の中でもいろいろと選択ができると思いますが、一番簡単な、点だけのものを選んで下さい。おそらく何もしないで、それらしいグラフが表示されると思います。どんどん次へ進とグラフができます。と言っても点がいくつも打ってあるものです。今度はそのグラフを選択、するとメニューに [グラフ] が出るはずです。そこで、[グラフ] のメニューの中から、[近似曲線を追加] を選びます。ここで [多項式近似] をえらび右に次数と書いてあるので、5 にしてみましょう。さらに [オプション] を開き、そこにある、グラフに [数式を表示] するを選択します。それで [OK]

x	$f(x)$
0	20
2	50
4	30
6	70
8	75
10	40



ここで出てきた多項式はかなり係数が複雑ですね。

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.0768x^5 - 2.0703x^4 + 19.453x^3 \\ &\quad -74.219x^2 + 100.96x + 20. \end{aligned}$$

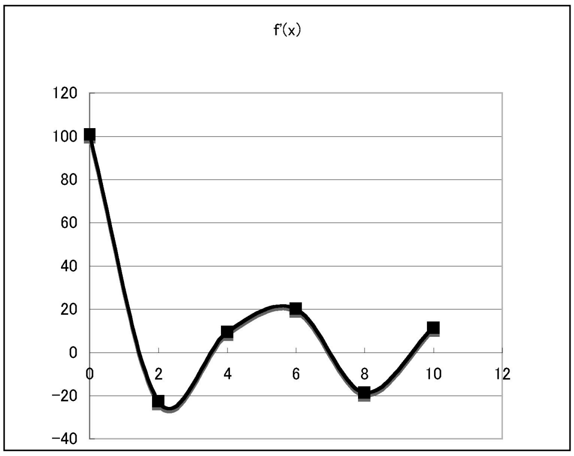
これを微分するとどうなりますか。ちょっと QuickMath (www.quickmath.com) で横着をしてみると

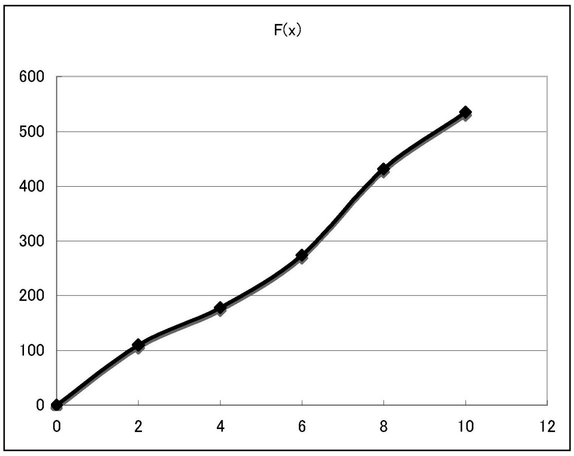
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.384x^4 - 8.2812x^3 + 58.359x^2 \\ &\quad -148.438x + 100.96 \end{aligned}$$

不定積分も QuickMath を使うと

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= 0.0128x^6 - 0.41406x^5 + 4.86325x^4 \\ &\quad -24.7397x^3 + 50.48x^2 + 20x + C \end{aligned}$$

これをすべて Excel のグラフで描いてみましょう。





左が導関数、右が不定積分で $C = 0$ としたものです。これは、もっと簡単に値を表で計算させ、グラフの散布図の平滑線で結ぶとして作りました。多項式の入力方法はサンプルを書いておきます。上の表の右の列にこれを入力すると $f'(x)$ などを計算してくれます。

$$= 0.384 * RC[-2]\hat{\ }4 - 8.2812 * RC[-2]\hat{\ }3 + 58.359 * RC[-2]\hat{\ }2 - 148.438 * RC[-2] + 100.96$$

たとえば最初のデータがそれぞれの時刻での車のスピードだとすると、$f'(x)$ は速度変化を表し、$F(x)$ は旅した道のりを表しています。もし、これがある単位で、出生数などを表していれば、$f'(x)$ は出生数の変化、$F(x)$ は生まれた人の総計となっているわけです。それぞれ自分の興味のあることに置き換えて、理解してみて下さい。

4.7.4　正規分布曲線と T スコア

n 個の数値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が与えられたとき、μ（平均, mean）と σ（標準偏差, standard deviation）を次の式で定義する。

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\ \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \cdots (x_n - \mu)^2}{n}}.$$

σ^2 は分散 (variance) と言われる。分散は、平均との差がどのくらい大きいかを表す（統計）量である。分散が 2 乗の和であるため、その平方根が、標準偏差である。

平均が μ, 標準偏差が σ となる次の代表的な関数のグラフが正規分布曲線と言われるものである。

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

少し上級の微分積分学を用いると（コースとしては、Calculus II）次の式を証明することができる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)dx = 1.$$

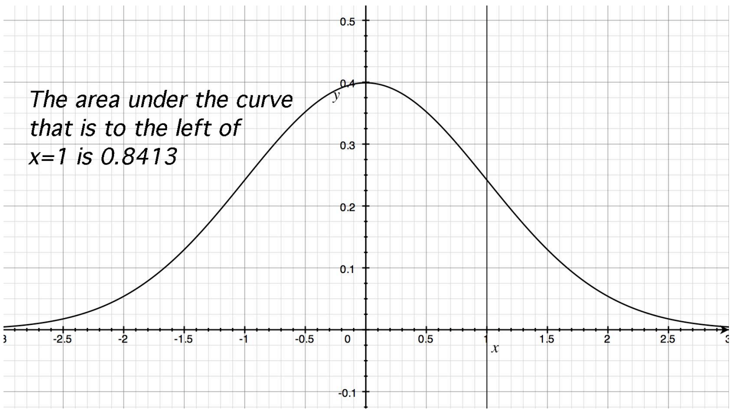
すなわち、$y = f(x)$ と x 軸との間の山型の部分の面積は 1 である。特に、$\mu = 0, \sigma = 1$ としたものを、標準正規分布曲線 という。

$$y = f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

変数の変換によって、$y = f(x)$ のグラフの u より左の面積、すなわち、平均が μ, 標準偏差が σ の正規分布曲線 $y = f(x)$ と x 軸と、$x = u$ で囲まれた面積は、標準正規分布曲線 $y = f_0(x)$ の、

$$v = \frac{u - \mu}{\sigma}$$

より左の面積と等しい。



v の値が 1 のときは、面積は 0.8413, 2 のときは、0.9772、3 のときは、0.9987 である。すなわち $x = 1$ より左に山の約 84% があり、$x = 2$ より左には、約 98% があると読むこともできる。

T スコアと呼ばれ、通常偏差値とも言われるものは、

$$50 + 10v = 50 + 10 \cdot \frac{u - \mu}{\sigma}$$

で与えられる。

これは、v の値を 10 倍して、50 を加えたものである。従って、偏差値 60 とは、$v = 1$ すなわち、$\mu + \sigma$ を意味し、その偏差値に対応する値より下に、山の 約 84% があることを意味している。平均点 μ の場合は、50% で、偏差値 70 の場合は、値が、$\mu + 2\sigma$、で、その値より小さいところに、山の 98% があることに対応している。正規分布曲線は応用上も大切な曲線であるが、そのもとになっている、e^{-x^2} の原始関数は初等関数（指数関数や、多項式、三角関数やその合成）では表せないことが分かっている。

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx$$

とすると、$F(x)$ は、$f_0(x)$ の原始関数で、$F(0) = 0.5$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.1) = 0.8643$, $F(1.2) = 0.8849$, $F(1.3) = 0.9032$, $F(1.4) = 0.9192$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.6) = 0.9452$, $F(1.7) = 0.9554$, $F(1.8) = 0.9641$, $F(1.9) = 0.9713$, $F(2) = 0.9772$, $F(3) = 0.9987$ のように値を求めることはできるが、一般的な式を簡単な関数では表せない。

4.7.5 雨粒の落下速度

ものを投げ上げたり、落下させたりする時（放物運動）、時刻 t での地上からの高さを $h(t)$ で表すとものの大きさや重さには関係なくいつでも $h(t) = at^2 + bt + c$ の形を大体

しているが、a の値はいつでも同じだという観測された (G. Galilei)。垂直方向の速度は $h(t)$ の平均変化率 $v(t) = h'(t) = 2at + b$ に等しく、速度の平均変化率、すなわち加速度は $v'(t) = h''(t) = 2a$ となる。a の値が一定だということは、下向きの加速度 $-2a$ が一定で、これが重力加速度といわれ $g = 9.8m/\mathrm{sec}^2$ となっている。

逆に加速度が α と一定の場合は $h''(t) = \alpha$ だから、$h'(t) = \alpha t + \beta$、$h(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma$ となります。β、γ は何でしょうか。数学的には積分定数ですが、$h'(0) = \beta$ ですから、この場合は $t = 0$ の時の速度。$h(0) = \gamma$ ですから γ は $t = 0$ の時のものの高さだということがわかります。$h''(t) = -g$ というような方程式（$h(t)$ を求めると言う意味で）を微分方程式といい、これらの条件 $h'(0) = \beta, h(0) = \gamma$ を初期条件と言います。

雨滴の落下を考えてみましょう。すると前の例のような式で考えると現実と合わないことが出てきます。高度2000メートルから降ってくる雨粒を考えてみましょう。（一般的には1000メートルぐらいだそうですが）上の例で求めた式から

$$0 = h(t) = -\frac{9.8}{2}t^2 + 2000,\ \text{より}\ t^2 \sim 400,\ t \sim 20.$$

落ちてくるのに20秒かかりますから、そのときの速度は $9.8{\cdot}20 = 196(m/sec) \sim 720(km/h)$ これは速過ぎます。電車で雨粒の動きを観察したことがありますか。電車が速いとかなり斜めにあとがつきます。わたしは電車の一番前の運転席が見えるところに乗ってスピードメータを見ながら、かつ横の窓にあたる雨粒の角度をはかり、ちょうど45度になった時の速度をはかろうとして観察していたことがあります。実際には風があったり、雨粒によって動きが違ったりしますが、電車がスピードを上げるとすぐ、45度よりも大きな角度になり、平行に雨粒が飛ぶようになります。ということは、電車のスピードよりかなり遅いということです。これは、空気抵抗を考えていないために起きた問題です。空気抵抗を考えると速度のおそいときは粘性抵抗というものが働き、速さに比例して進む方向と逆向きの力が働きます。

$$v'(t) = -g - kv(t),\ v = -\frac{g}{k} + Ce^{-kt} = -\frac{g}{k} + (v_0 + \frac{g}{k})e^{-kt}.$$

これで計算してみると、1mm の雨粒の速度は大体 432km/h になります。これもまだ速過ぎます。速度が速くなると慣性抵抗というのがはたらきこれは、速度の二乗に比例してはたらきそれを勘案すると、23.7km/h 程度になり大体実測とあっていることがわかります。結局、物理ではすべての情報を入れると複雑になり過ぎるので、条件をいろいろと入れて、たとえば空気抵抗がないとか、十分ゆっくりだということにして、求めて、それが実験結果とあっているかあっていないかを見て修正していくわけです。現実が大切ですから。つまり常に厳密には考えていないということも言っているわけです。厳密に考えていないから、かえってきれいな結果が得られ、万有引力の法則とか $f = m\alpha$ の様なことから問題を考えることができるようになるわけです。数学では、最初から設定した枠組のなかで、どれだけのことが言えるかを考えるわけです。厳密さを一番大切にするわけです。そう言った違いから、物理と数学はつねに、相互依存していながら全くちがった分野として「お互いに尊敬しあう？」関係にあります。でも、数学で厳密にあることが証明でき、

大発見というとき、物理ではそんなことは、50 年前から知っていたなどと酷評されることもありますが。

この微分･積分はイギリスのニュートン（1642－1727）とドイツのライプニッツ（1646－1716）によって基礎ができました。この二人とも数学と物理学両方に大きな貢献をした人です。

4.8　練習問題

Quiz 4, 2005

1. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=q(x)(x+2)+r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。
2. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=a_4(x-2)^4+a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ となるような数 a_4,a_3,a_2,a_1,a_0 を求めよ。
3. $h(x)=a(x-3)(x-5)(x-7)+b(x-1)(x-5)(x-7)+c(x-1)(x-3)(x-7)+d(x-1)(x-3)(x-5)$ は、$h(1)=48$, $h(3)=-3$, $h(5)=16$, $h(7)=-1$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。
4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(1)=h(1)$, $f(3)=h(3)$, $f(5)=h(5)$, $f(7)=h(7)$ となる多項式で $f(0)=h(0)$ かつ $\deg f(x)=6$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

Quiz 4, 2005, 解答

1. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=q(x)(x+2)+r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。

   解：下のように組み立て除法で求めると (3 行目まで)、$q(x)=c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0=x^3-3x$, $r=-5$。

-2	1	2	-3	-6	-5
		-2	0	6	0
	$1\ (c_3)$	$0\ (c_2)$	$-3\ (c_1)$	$0\ (c_0)$	$-5\ (r)$

2. $x^4+2x^3-3x^2-6x-5=a_4(x-2)^4+a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ となるような数 a_4,a_3,a_2,a_1,a_0 を求めよ。

   解：下の組み立て除法から、$a_4=1, a_3=10, a_2=33, a_1=38, a_0=3$ となります。

2	1	2	-3	-6	-5
		2	8	10	8
2	1	4	5	4	$3\ (r=a_0)$
		2	12	34	
2	1	6	17	$38\ (a_1)$	
		2	16		
2	1	8	$33\ (a_2)$		
		2			
2	$1\ (a_4)$	$10\ (a_3)$			

3. $h(x) = a(x-1)(x-3)(x-5) + b(x+1)(x-3)(x-5) + c(x+1)(x-1)(x-5) + d(x+1)(x-1)(x-3)$ は、$h(1) = 48$, $h(3) = -3$, $h(5) = 16$, $h(7) = -1$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。

   解：

$$
\begin{aligned}
h(x) \quad &= \quad 48\frac{(x-3)(x-5)(x-7)}{(1-3)(1-5)(1-7)} - 3\frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{(3-1)(3-5)(3-7)} \\
&\quad + 16\frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(5-1)(5-3)(5-7)} - \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(7-1)(7-3)(7-5)} \\
&= \quad -(x-3)(x-5)(x-7) - \frac{3}{16}(x-1)(x-5)(x-7) \\
&\quad - (x-1)(x-3)(x-7) - \frac{1}{48}(x-1)(x-3)(x-5)
\end{aligned}
$$

   だから、$a = -1$, $b = -\frac{3}{16}$, $c = -1$, $d = -\frac{1}{48}$ となります。

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(1) = h(1)$, $f(3) = h(3)$, $f(5) = h(5)$, $f(7) = h(7)$ となる多項式で $f(0) = h(0)$ かつ $\deg f(x) = 6$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

   解：たとえば左下の多項式は次数が 6 で条件を満たす。

$$
h(x) + x^2(x+1)(x-1)(x-3)(x-5), \quad h(x) + g(x)(x+1)(x-1)(x-3)(x-5).
$$

   で $g(x)$ が一次多項式 $ax(x+b)$ $(a \neq 0)$ であれば、いつでも条件を満たします。逆に、条件を満たすものは、すべてこのように書くことができます。

Quiz 4, 2004

1. $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + x - 6 = q(x)(x-2) + r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。

2. $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + x - 6 = a_4(x-2)^4 + a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0$ となるような数 a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 を求めよ。

3. $h(x) = a(x-1)(x-3)(x-5) + b(x+1)(x-3)(x-5) + c(x+1)(x-1)(x-5) + d(x+1)(x-1)(x-3)$ は、$h(-1) = 24$, $h(1) = -16$, $h(3) = 8$, $h(5) = -48$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(-1) = h(-1)$, $f(1) = h(1)$, $f(3) = h(3)$, $f(5) = h(5)$ となる多項式で $\deg f(x) = 5$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

Quiz 4, 2004, 解答

1. $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + x - 6 = q(x)(x-2) + r$ となるような多項式 $q(x)$ と数 r を求めよ。

   解：下のように組み立て除法で求めると (3 行目まで)、$q(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = x^3 - 6x^2 + 3x + 7$, $r = 8$。

2	1	-8	15	1	-6
		2	-12	6	14
2	1 (c_3)	-6 (c_2)	3 (c_1)	7 (c_0)	8 ($r = a_0$)
		2	-8	-10	
2	1	-4	-5	-3 (a_1)	
		2	-4		
2	1	-2	-9 (a_2)		
		2			
2	1	0 (a_3)			
	1 (a_4)				

2. $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + x - 6 = a_4(x-2)^4 + a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0$ となるような数 a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 を求めよ。

   解：上の組み立て除法から、$a_4 = 1, a_3 = 0, a_2 = -9, a_1 = -3, a_0 = 8$ となります。

3. $h(x) = a(x-1)(x-3)(x-5) + b(x+1)(x-3)(x-5) + c(x+1)(x-1)(x-5) + d(x+1)(x-1)(x-3)$ は、$h(-1) = 24$, $h(1) = -16$, $h(3) = 8$, $h(5) = -48$ を満たすとする。このとき、a, b, c, d を求めよ。

   解：

$$
\begin{aligned}
h(x) &= 24\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-1)(-1-3)(-1-5)} - 16\frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{(1+1)(1-3)(1-5)} \\
&\quad + 8\frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(3+1)(3-1)(3-5)} - 48\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(5+1)(5-1)(5-3)} \\
&= -\frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-5) - (x+1)(x-3)(x-5) \\
&\quad - \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-5) - (x+1)(x-1)(x-3)
\end{aligned}
$$

   だから、$a = -1/2$, $b = -1$, $c = -1/2$, $d = -1$ となります。

4. $h(x)$ を前問の多項式とする。このとき、$f(-1) = h(-1)$, $f(1) = h(1)$, $f(3) = h(3)$, $f(5) = h(5)$ となる多項式で $\deg f(x) = 5$ となるものを一つ書け。$h(x)$ を用いて書いても良い。

解：たとえば左下の多項式は次数が 5 で条件を満たす。

$$h(x) + x(x+1)(x-1)(x-3)(x-5), \quad h(x) + g(x)(x+1)(x-1)(x-3)(x-5).$$

で $g(x)$ が一次多項式 $ax+b$ $(a \neq 0)$ であれば、いつでも条件を満たします。逆に、条件を満たすものは、すべてこのように書くことができます。

Quiz 4, 2003

1. $f(x)$ を次数が 7 の多項式、$g(x)$ を次数が 3 の多項式とする。このとき、$q(x)$ と $r(x)$ を多項式で次の式を満たすものとする。($\deg r(x)$ は多項式 $r(x)$ の次数を表す。)
$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \ \deg r(x) < 3$$
このとき、$q(x)$ の次数はいくつか。その理由も記せ。

2. $2x^3 - 3x^2 + x + 1 = p(x)(x-2) + r$ となるような多項式 $p(x)$ と数 r を求めよ。

3. $2x^3-3x^2+x+1 = a_3(x-2)^3+a_2(x-2)^2+a_1(x-2)+a_0$ となるような数 a_3, a_2, a_1, a_0 を求めよ。

4. $h(x) = b_0\cdot(x-1)(x-2)(x-3)+b_1\cdot x(x-2)(x-3)+b_2\cdot x(x-1)(x-3)+b_3\cdot x(x-1)(x-2)$ は、$h(0) = 6, \ h(1) = -2, \ h(2) = 10, \ h(3) = -6$ を満たすとする。このとき、b_0, b_1, b_2, b_3 を求めよ。

Quiz 4, 2003, 解答

1. $f(x)$ を次数が 7 の多項式、$g(x)$ を次数が 3 の多項式とする。このとき、$q(x)$ と $r(x)$ を多項式で次の式を満たすものとする。($\deg r(x)$ は多項式 $r(x)$ の次数を表す。)
$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \ \deg r(x) < 3$$
このとき、$q(x)$ の次数はいくつか。その理由も記せ。

$$\deg q(x) + 3 = \deg q(x) + \deg g(x) = \deg q(x)g(x) = \deg(f(x) - r(x)) = 7$$

最後の部分は $f(x)$ の次数が 7 で $r(x)$ の次数は 2 以下で 7 次の項を含まないから、一般的には $\deg(f(x) - r(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg r(x))$ ですが、この場合は、$\deg(f(x) - r(x)) = 7$。したがって、$\deg q(x) = 7 - 3 = 4$。$q(x)$ の次数は 4。

2. $2x^3 - 3x^2 + x + 1 = p(x)(x-2) + r$ となるような多項式 $p(x)$ と数 r を求めよ。

下のように組み立て除法で求めると、$q(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0 = 2x^2 + x + 3, \ r = 7$。

2	2	-3	1	1
		4	2	6
2	$2(c_2)$	$1(c_1)$	$3(c_0)$	$7(a_0 = r)$
		4	10	
2	2	5	$13(a_1)$	
		4		
	$2(a_3)$	$9(a_2)$		

3. $2x^3 - 3x^2 + x + 1 = a_3(x-2)^3 + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0$ となるような数 a_3, a_2, a_1, a_0 を求めよ。

   同じく上の組み立て除法から、$a_3 = 2, a_2 = 9, a_1 = 13, a_0 = 7$ となります。

4. $h(x) = b_0 \cdot (x-1)(x-2)(x-3) + b_1 \cdot x(x-2)(x-3) + b_2 \cdot x(x-1)(x-3) + b_3 \cdot x(x-1)(x-2)$ は、$h(0) = 6,\ h(1) = -2,\ h(2) = 10,\ h(3) = -6$ を満たすとする。このとき、b_0, b_1, b_2, b_3 を求めよ。

   $6 = h(0) = b_0(0-1)(0-2)(0-3) = -6b_0$ だから $b_0 = -1$
   $-2 = h(1) = b_1 \cdot 1(1-2)(1-3) = 2b_1$ だから $b_1 = -1$
   $10 = h(2) = b_2 \cdot 2(2-1)(2-3) = -2b_3$ だから $b_2 = -5$
   $-6 = h(3) = b_3 \cdot 3(3-1)(3-2) = 6b_3$ だから $b_3 = -1$

   となる。

Quiz 4, 2002　$f(x)$ を x の 3 次の多項式とし、自然数 n に対して、$f_n = f(n)$ とおく。f_n が次の条件を満たす時、以下の問いに答えよ。(3 行目、4 行目はヒント。)

f_1		f_2		f_3		f_4		f_5		f_6		f_7		f_8
33		27		14		0		-9		-7		12		54
	-6		-13		-14		-9		2		19		42	
		-7		-1		5		11		17		23		

1. f_9 は何か。

2. $\Delta^m f_n = 0$ となる自然数で最小の m は何か。

3. $\Delta^2 f_n$ を求めよ。

4. 2 次の多項式 $g(x)$ で $f(x) = (x-4)g(x)$ となるものが存在することを示せ。定理を使う時はどの定理を用いたかも明確に記すこと。

5. $f(x)$ を下のように書く時、b_1, b_2, b_3, b_4 を求めよ。

$$\begin{aligned} f(x) &= b_1(x-2)(x-3)(x-4) + b_2(x-1)(x-3)(x-4) \\ &\quad + b_3(x-1)(x-2)(x-4) + b_4(x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

Quiz 4, 2002, 解答 $f(x)$ を x の3次の多項式。自然数 n に対して、$f_n = f(n)$。差をとったものが下の段に書かれている。太字のものは新たに付け加えたもの。

f_1		f_2		f_3		f_4		f_5		f_6		f_7		f_8		$\mathbf{f_9}$
33		27		14		0		-9		-7		12		54		**125**
	-6		-13		-14		-9		2		19		42		**71**	
		-7		-1		5		11		17		23		**29**		
			6		**6**		**6**		**6**		**6**		**6**			
				0		**0**		**0**		**0**		**0**				

1. f_9 は何か。解：$f_9 = 125$。問題の最初に $f(x)$ は3次の多項式とあるので、定理 5.1 より $\Delta^4 f_n = 0$ である。実際上のように差をとっていくと、4回差をとったものは、零になっている。$\Delta^4 f_n = 0$ よりその次も 0 としてよいから、今度は順次に上がっていくと、f_9 が求まる。$f(x)$ の次数が 3 という仮定がないと、最後の行は 0 が続くのが自然に見えますが、必ずそうだとは結論できません。そこで、仮定に入れておきました。

2. $\Delta^m f_n = 0$ となる最小の m。解：$m = 4$。$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$、$\Delta^2 f_n = \Delta(f_{n+1} - f_n)$ となっていますが、前問で書いたように $m = 4$ で零になります。

3. $\Delta^2 f_n$。解：$6n-13$。$\Delta^2 f_n = g_n$ とすると、これは、$-7, -1, 5, 11, 17, \ldots$ となっている数列です。これは、公差が 6 で初項が -7 の等差数列ですから $g_n = -7+6(n-1) = 6n-13$ となります。正確には、$\Delta^2 g_n = \Delta^4 f_n = 0$ だから、定理 5.1 より g_n は n の 1 次式、すなわち、$g_n = a_1 n + a_0$ と書けることがわかりますから、$-7 = g_1 = a_1 + a_0$、$-1 = g_2 = 2a_1 + a_0$ から $a_1 = 6$、$a_0 = -13$ を導くこともできます。n の一次式で書ける数列が等差数列であるということもできます。

4. 2次の多項式 $g(x)$ で $f(x) = (x-4)g(x)$ となるものが存在することを示せ。解：定理 5.2 (3) を用いると $m = 1, a_1 = 4$ として、$f(4) = f_4 = 0$ だから $f(x) = (x-4)g(x)$ と書くことができます。または同じ定理の (2) を用い、$g(x) = (x-4)$ とすると $q(x)$, $r(x)$ で $f(x) = q(x)(x-4)+r(x)$ となるものがあります。$\deg r(x) < \deg(x-4) = 1$ ですから、$r(x)$ は定数。$f(4) = f_4 = 0$ を使うと、$0 = q(4)(4-4)+r(4) = r(4)$。しかし $r(x)$ は定数でしたから $r(x) = 0$ すなわち、$f(x) = q(x)(x-4)$ と書けます。ここで $g(x) = q(x)$ とすれば結果が得られます。

5. 解：$x = 1, 2, 3, 4$ を代入すると次のようになります。
$$\begin{aligned}
33 &= f_1 = f(1) = b_1(1-2)(1-3)(1-4) = -6b_1, \quad b_1 = -\frac{11}{2} \\
27 &= f_2 = f(2) = b_2(2-1)(2-3)(2-4) = 2b_2, \quad b_2 = \frac{27}{2} \\
14 &= f_3 = f(3) = b_3(3-1)(3-2)(3-4) = -2b_3, \quad b_3 = -7 \\
0 &= f_4 = f(4) = b_4(4-1)(4-2)(4-3) = 6b_4, \quad b_4 = 0
\end{aligned}$$
すなわち、$b_1 = -\dfrac{11}{2}$, $b_2 = \dfrac{27}{2}$, $b_3 = -7$, $b_4 = 0$.

Quiz 4, 2001

1. $f(x)$ を $f(1)=2,\ f(2)=7,\ f(3)=1,\ f(4)=8$ を満たす多項式とする。以下の問題で答えを簡単にする必要はない。
   (a) 次数が 3 以下としたとき $f(x)$ を一つ書け。
   (b) 次数が丁度 4 としたとき $f(x)$ を一つ書け。
2. $a_1=1,\ a_2=3/4,\ a_3=9/16$ を満たす等比数列 $\{a_i\}$ を考える。
   (a) a_{10} はいくつか。
   (b) $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ はいくつか。
   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ はいくつか。
3. 次の極限を求めよ。
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2}$ (Hint:分母分子を因数分解)
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x^2(1+\cos x)}$ (Hint:いくつかの積に分けて考える)

Quiz 5, 2005

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2-3n}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4}{x+2}$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x-2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-9x^2+4x+12}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12}$ を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work!)
3. 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギー E の（2 を底とする）対数 $(\log_2)$ をとった値の一次関数（$c\cdot\log_2 E+b$ の形）で表される。また、$M6$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当し、エネルギーが 2 倍になると、マグニチュードが 0.2 増加する。マグニチュードが x の地震は、広島型原爆 n 個分のエネルギーに相当するとして、 n を x で表す式を求めよ。ただし n は整数でなくても良いものとする。

Quiz 5, 2005, 解答

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}-3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

   (b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} x-2 = -4.$

   (c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4}{x+2}$ 発散
   $x+2$ は $x \to -2$ のときいくらでも小さくなる。分子は 4 より大きいので、一定の値には収束しません。The limit does not exist! 極限が $+\infty$ とは限りません。$x+2$ は $x=-2$ の近くで負の値にもなるからです。

   (d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{-4} = 0.$

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-9x^2+4x+12}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12}$ を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work!)
   解:$f(x) = x^4-9x^2+4x+12$, $g(x) = x^4-3x^3+3x^2-8x+12$ とすると、$f(2) = g(2) = 0$ となる。従って、$\lim_{x\to 2} f(x)/g(x)$ は、0/0 の不定形になる。そこで、組み立て除法を用い、$f(x) = (x-2)(x^3+2x^2-5x-6)$, $g(x) = (x-2)(x^3-x^2+x-6)$ と書くと、
   $$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-9x^2+4x+12}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-x^2+x-6}$$
   となるところが、これもまた不定形なので、組み立て除法を用いて
   $$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+4x+3)}{(x-2)(x^2+x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x+3}{x^2+x+3} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

3. 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギー E の（2 を底とする）対数 $(\log_2)$ をとった値の一次関数（$c\cdot\log_2 E + b$ の形）で表される。また、$M6$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当し、エネルギーが 2 倍になると、マグニチュードが 0.2 増加する。マグニチュードが x の地震は、広島型原爆 n 個分のエネルギーに相当するとして、 n を x で表す式を求めよ。ただし n は整数でなくても良いものとする。

   解：$n = 2^{5(x-6)} = 32^{x-6}$.

   マグニチュード x の地震のエネルギーを $E(x)$ とすると、$n = E(x)/E(6)$ でかつ、$E(x+0.2) = 2\cdot E(x)$ である。 $x = c\cdot\log_2 E(x) + b$ と表すと.
   $$0.2 = c\cdot\log_2(E(x+0.2)) + b - (c\cdot\log_2(E(x)) + b) = c\cdot\log_2 \frac{E(x+0.2)}{E(x)} = c\cdot\log_2 2 = c.$$
   従って、$x-6 = 0.2\log_2(E(x)/E(6)) = 0.2\log_2 n$ これより、$(x-6)/0.2 = 5(x-6) = \log_2 n$ となるから、求める結果が得られる。

Quiz 5, 2004

1. 次の極限を求めよ。極限がない場合はその理由も書いて下さい。途中の式も略さずに。(Show work !)

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{1-7n}$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7}{8}\right)^n$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x-2}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-3x^2+4x-4}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-x^2+5)(x-2)}{(x^2+x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+5}{x^2+x-3}$ としてよい理由は何か。

3. 地震の強さを表す単位マグニチュード (M) は、そのエネルギーの対数 (Log) をとった値に比例し、$6M$ の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに相当する。阪神・淡路大地震は $7.2M$、今回の中越の地震は $6.8M$ と言われている。阪神・淡路大地震のエネルギーが広島に落された原爆の 64 個分とすると、今回の中越の地震はこの原爆何個分のエネルギーに相当するか。(人の悲しみの深さは、それをもたらしたエネルギーとは関係ありませんが、防災を考えるとこのような考察も重要です。)

Quiz 5, 2004, 解答

1. (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{1-7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}-7}=\frac{3}{-7}=-\frac{3}{7}$

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7}{8}\right)^n=0.$ $c=(-7/8)$ とすると、$|c|<1$ だから、$|c^n|=|c|^n\to 0$ (as $n\to\infty$).

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}=\frac{\lim_{x\to 2}x^2+4}{\lim_{x\to 2}x+2}=\frac{8}{4}=2.$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+2=4.$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x-2}.$　$x-2$ は $x\to 2$ のときいくらでも小さくなる。分子は 4 より大きいので、一定の値には収束しません。The limit does not exist! 発散。極限が $+\infty$ とは限りません。$x-2$ は $x=2$ の近くで負の値にもなるからです。

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-3x^2+4x-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)}{(x-2)(x^2-x+2)} = \frac{32}{4} = 8.$
$f(x) = x^4-16$、$g(x) = x^3-3x^2+4x-4$ とすると $f(2) = g(2) = 0$ であることがわかります。したがって、因数定理から $x-2$ で割れることがわかりますから、組み立て除法などを用いて、$f(x) = (x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$、$g(x) = (x-2)(x^2-x+2)$ となる。このあとも組み立て除法を用いると計算が早いと思います。

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-x^2+5)(x-2)}{(x^2+x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+5}{x^2+x-3}$ としてよい理由は何か。

解：「関数 $f(x)$ において 変数 x が a と異なる値をとりながら a に近づくとき、$f(x)$ が一つの値 α に近づくならば x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値は α であるという。」ですから $x-2\neq 0$ です。したがって、その条件のもとでは、等しくなります。

3. 今回の中越の地震はこの原爆何個分のエネルギーに相当するか。

解：a で atomic bomb、h で阪神・淡路、c で中越をあらわし、M は地震の強さ、E はエネルギーをあらわすと、C を定数、底を b とすると、$M_a = C\log_b E_a$, $M_h = C\log_b E_h$, $M_c = C\log_b E_c$。条件は、$M_a = 6$、$M_h = 7.2$、$M_c = 6.8$, $E_h/E_a = 64 = 2^6$ ですから（実は b は何でも構いません）、

$$1.2 = M_h - M_a = C\log_b E_h - C\log_b E_a = C\log_b\left(\frac{E_h}{E_a}\right) = C\log_b 64 = 6C\log_b 2.$$

これで C が決まります。欲しいのは E_c/E_a ですから、

$$C\log_b\left(\frac{E_c}{E_a}\right) = C\log_b E_c - C\log_b E_a = 0.8 = 4C\log_b 2 = C\log_b 2^4 = C\log_b 16.$$

したがって、$E_c/E_a = 16$。16 倍。もちろん、授業で言ったように、マグニチュードが 0.2 あがるごとにエネルギーが倍になることを使えば、$M_c - M_a = 0.8 = 4\cdot(0.2)$ ですから、16 倍であることがわかります。

Quiz 5, 2003

1. 次の極限を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work !)

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{2-5n}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^n$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-6}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3-2x^2+5x-8)}{x^3-x^2-4}$

2. $f(x)=x^4-6x^3+8x^2+10x-19$ とすると、$f(1)=-6$ を満たす。このとき、区間 $[1,2]$ (1 と 2 の間) に、$f(x)=0$ を満たす x を含むか。理由も述べよ。

Quiz 5, 2003, 解答

1. 次の極限を求めよ。途中の式も略さずに。(Show work !)

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{2-5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{5}{n}}{\frac{2}{n}-5}=\frac{\lim_{n\to\infty}2-\frac{5}{n}}{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-5}=-\frac{2}{5}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^n=0\ \text{ as } \left|\tfrac{-5}{7}\right|<1$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+2=4$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=$ D.N.E. (diverge)
なぜなら、分子は $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-3)(x+1)=-3$, であり、分母は $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x+3)(x-2)=0$ だからである。(分母は x が 2 より小さい時は、負でとても小さい数になり、2 より大きい時には、正でとても小さい数になりますから、全体としては、$x<2$ で $x\to 2$ のときは正の無限大に発散、$x>2$ で $x\to 2$ のときは、負の無限大に発散となっています。$y=1/x$ のグラフが思い浮かべばそれを考えてみて下さい。)

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}=\frac{\lim_{x\to 2}x^2+x-6}{\lim_{x\to 2}x^2-2x-3}=\frac{0}{-3}=0$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3-2x^2+5x-8)}{x^3-x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3-2x^2+5x-8)}{(x-2)(x^2+x+2)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+5x-8}{x^2+x+2}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -1 & 0 & -4 \\
 & & 2 & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

2. $f(x)=x^4-6x^3+8x^2+10x-19$ とすると、$f(1)=-6$ を満たす。このとき、区間 $[1,2]$ (1 と 2 の間) に、$f(x)=0$ を満たす x を含むか。理由も述べよ。

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -6 & 8 & 10 & -19 \\
 & & 2 & -8 & 0 & 20 \\
\hline
 & 1 & -4 & 0 & 10 & \multicolumn{1}{|r}{1}
\end{array}$$

したがって、$f(2)=1$ である。$f(x)$ は連続でかつ、$f(1)=-6<0$ かつ、$f(1)=1>0$ だから、中間値の定理により、$f(c)=0$ となる c が 区間 $[1,2]$ 内にある。

Quiz 5, 2002

1. 次の極限を求めよ。

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-6}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

2. $f(x)=x^3-2x^2-5x+3$ とすると、$f(-1)=5,\ f(0)=3,\ f(1)=-3,\ f(2)=-7,\ f(3)=-3,\ f(4)=15$ を満たす。

   (a) 次の区間のうち、$f(x)=0$ を満たす x を含むものをすべて丸で囲め。

   $$[-1,0]\quad [0,1]\quad [1,2]\quad [2,3]\quad [3,4]$$

   (b) 区間 $[-2,-1]$ に、$f(x)=0$ を満たす x を含むか。理由も述べよ。

3. マグニチュード 6 の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに大体相当する。マグニチュード 7.4 の地震のエネルギーはこの原子爆弾何個分に相当するか。

Quiz 5, 2002, 解答

1. 次の極限を求めよ。

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3=3+3=6$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x+3)}=\frac{(3-3)(3+1)}{(3-2)(3+3)}=0$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=$ 発散, or D.N.E

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+1}=\frac{5}{4}$

2. $f(x)=x^3-2x^2-5x+3$ とすると、$f(-1)=5,\ f(0)=3,\ f(1)=-3,\ f(2)=-7,\ f(3)=-3,\ f(4)=15$ を満たす。

(a) 次の区間のうち、$f(x) = 0$ を満たす x（方程式 $f(x) = 0$ の解とか根といいます）を含むものをすべて丸で囲め。

$$[-1, 0] \quad [0, 1] \quad [1, 2] \quad [2, 3] \quad [3, 4]$$

解：[0,1] と [3,4]: $f(0) > 0$ かつ $f(1) < 0$ より、区間 $[0, 1]$ に $f(x) = 0$ となる x が必ずある。同様に、$f(3) > 0$ かつ $f(4) < 0$ より、区間 $[0, 1]$ に $f(x) = 0$ となる x が必ずある。他の区間にないことは分かるのでしょうか。二つの説明が考えられます。$f(x)$ は 3 次多項式で x^3 の係数は $1 > 0$ ですから、x が $-\infty$ の方へ向かうと、$f(x)$ は $-\infty$ になります。$f(-1) > 0$ ですから -1 より小さい x で $f(x) = 0$ となるものも必ずあります。$f(x) = 0$ を満たす x は多くても 3 個で、すでに上の区間で二つ見つけてありますから、もう一つ $x < -1$ となるものですべてであることが分かります。一般には上の情報だけで、他の区間に解がないかどうかは、普通は決められません。解があることはいえますが。二つ目の方法は、次の問題を使い、$[-2, -1]$ に解がありますから、それですべて、すなわち他の区間にはないことが分かります。

(b) 区間 $[-2, -1]$ に、$f(x) = 0$ を満たす x を含むか。理由も述べよ。

解：多項式 $f(x)$ は連続。さらに、$f(-2) = -8 - 8 + 10 + 3 = -3 < 0$ かつ $f(-1) = 5 > 0$ なので、中間値の定理 Proposition 6.3 により $f(c) = 0$ となる c で $-2 < c < -1$ を満たすものが存在する。これが求めるものである。

3. マグニチュード 6 の地震のエネルギーは広島に落された原子爆弾のエネルギーに大体相当する。マグニチュード 7.4 の地震のエネルギーはこの原子爆弾何個分に相当するか。

解：マグニチュードの値が 1 増えるごとにエネルギーは 32 倍になる。この場合は、1.4 増えているから

$$32^{7.4-6} = 32^{1.4} = (2^5)^{7/5} = 2^{5\cdot(7/5)} = 2^7 = 128$$

したがって、128 個分に相当する。

Quiz 5, 2001

1. $f(x)$ を $f(1) = -2,\ f(2) = 2,\ f(3) = 14,\ f(4) = 40$ を満たす多項式とする。以下の問題で答えを簡単にする必要はない。

(a) 次数が 3 の多項式 $g(x)$ で $g(1) = 1, g(2) = g(3) = g(4) = 0$ となるものを一つ書け。

(b) 次数が 3 以下としたとき $f(x)$ を一つ書け。

(c) 次数が丁度 4 としたとき $f(x)$ を一つ書け。

2. $a_1 = 2,\ a_2 = -3/2,\ a_3 = 9/8,\ a_4 = -27/32$ を満たす等比数列 $\{a_i\}$ を考える。
   (a) a_{11} はいくつか。
   (b) $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}$ はいくつか。
   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ はいくつか。
3. 次の極限を求めよ。
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{n^3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2}{n^2+2}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to-3} \frac{x^3+27}{x^2+2x-3}$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos(x+\pi)\sin x}{2x}$

Quiz 6, 2005

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)
   (a) $y = -2x^3 + x^2 - 5x + 1$
   (b) $y = (x^2 - x + 1)(e^x + 1)$
   (c) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$
   (d) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3} + 2\log x + 5x^{7/5}$
   (e) $y = (x^2+3)^{100}$
   (f) $y = xe^{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + 1$ とする。

   $f(x)$ の導関数を求め、$x = -1, 0$ および 2 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)
   (a) $f'(x) =$
   (b) $x = -1$
   (c) $x = 0$
   (d) $x = 2$

Quiz 6, 2005, 解答

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = -2x^3 + x^2 - 5x + 1$
   $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$, $(1)' = 0$ だから、$y' = -6x^2 + 2x - 5$.

   (b) $y = (x^2 - x + 1)(e^x + 1)$
   $y' = (2x - 1)(e^x + 1) + (x^2 - x + 1)e^x$.　　(積の微分参照)

   (c) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
   $y' = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$.　　(商の微分参照)

   (d) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^3} + 2\log x + 5x^{7/5} = x^{1/2} - x^{-3} + 2\log x + 5x^{7/5}$
   $y' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} - (-3)x^{-4} + 2\dfrac{1}{x} + 5 \cdot \dfrac{7}{5}x^{2/5} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{2}{x} + 7\sqrt[5]{x^2}$

   (e) $y = (x^2 + 3)^{100}$
   $y' = 100(x^2 + 3)^{99}(x^2 + 3)' = 200x(x^2 + 3)^{99}$.
   (合成関数の微分：$h(x) = x^2 + 3$, $g(X) = X^{100}$, $y = f(x) = g(h(x))$.)

   (f) $y = xe^{x^2}$
   $y' = x(e^{x^2})' + e^{x^2} = xe^{x^2}(x^2)' + e^{x^2} = (2x^2 + 1)e^{x^2}$
   (積の微分と合成関数の微分：$f(x) = e^{x^2} = g(h(x))$, $h(x) = x^2$, $g(X) = e^X$.)

2. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + 1$ とする。

   $f(x)$ の導関数を求め、$x = -1, 0$ および 2 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $f'(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

   (b) $x = -1$: $f'(-1) = 0$, $f''(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$, $f''(-1) = 0$, $f'''(x) = 12x^2 + 6x - 6$, $f'''(-1) = 0$, $f''''(x) = 24x + 6$, $f''''(-1) = -18 < 0$. 従って、$f'''(x)$ は $x = -1$ で減少かつ $f'''(-1) = 0$ だから、$f'''(x) > 0$ $(x < -1)$ かつ $f'''(x) < 0$ $(x > -1)$ だから、$f''(x)$ は $x = -1$ で増加から減少に転じる。$f''(-1) = 0$ だから $f''(x) < 0$ $(x \neq -1)$ したがって $f''(x)$ は $x = -1$ で減少で、$f'(-1) = 0$ よって、 $f'(x) > 0$ $(x < -1)$ かつ $f'(x) < 0$ $(x > -1)$。これは、$f(x)$ が $x = -1$ で 増大から減少に転じることがわかり、$x = -1$ で極大である。

   (c) $x = 0$: $f'(0) = -2 < 0$ だから $f(x)$ は $x = 0$ で減少。

   (d) $x = 2$: $f'(2) = 0$, かつ $f''(2) = 27 > 0$ だから $f'(x)$ は $x = 2$ で増加で $f'(2) = 0$ だから $f'(x)$ は $x = 2$ を境に負から正に転じる。よって $f(x)$ は $x = 2$ で減少から増大に転じるので、$x = 2$ で極小。

Quiz 6, 2004

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = x^7 - 2x^3 + 5$

   (b) $y = (x^3 - 2x + 1)e^x$

   (c) $y = \dfrac{1}{1+e^x}$

   (d) $y = \dfrac{x-2}{x^2+1}$

2. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 3$ の導関数は $f'(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ である。$x = -2, 0$ および 1 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $x = -2$

   (b) $x = 0$

   (c) $x = 1$

Quiz 6, 2004, 解答

1. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = x^7 - 2x^3 + 5$. 解：$y' = 7x^6 - 6x^2$.

   (b) $y = (x^3 - 2x + 1)e^x$, 解：$y' = (x^3 - 2x + 1)'e^x + (x^3 - 2x + 1)(e^x)' = (3x^2 - 2)e^x + (x^3 - 2x + 1)e^x = (x^3 + 3x^2 - 2x - 1)e^x$.

   (c) $y = \dfrac{1}{1+e^x}$
   解：
   $$y' = \frac{(1)'(1+e^x) - 1(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

   (d) $y = \dfrac{x-2}{x^2+1}$
   解：
   $$y' = \frac{(x-2)'(x^2+1) - (x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x(x-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}.$$

2. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 3$ の導関数は $f'(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ である。$x = -2, 0$ および 1 のとき、$f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $x = -2$: 極大

(b) $x = 0$: 減少

(c) $x = 1$: 極小

$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$, $f'''(x) = 12x^2 - 6x - 6$, $f''''(x) = 24x - 6$ だから、$f'(-2) = 0$, $f''(-2) = -27 < 0$, $f'(0) = -2 < 0$, $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$, $f''''(1) = 18 > 0$.

x		-2		0		1	
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	減少	$\searrow$	極小	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
$f''(x)$	$-$	-27	$-$		$+$	0	$+$
					$\searrow$		$\nearrow$
$f'''(x)$					$-$	0	$+$
						$\nearrow$	
$f''''(x)$						$+18$	

Quiz 6, 2003

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ とする。

   (a) $f(x)$ の $x = 2$ における微分係数 $f'(2)$ を定義にしたがって求めよ。途中の計算 (または説明) も書くこと。(Show work!)
   $f'(2) = \lim_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} =$

   (b) $f(x) = a_3(x-3)^3 + a_2(x-3)^2 + a_1(x-3) + a_0$ (a_3, a_2, a_1, a_0 は数) と書く時、a_3, a_2, a_1, a_0 の中で、$f(3)$ はどれか、$f'(3)$ はどれか。また、$f'(3)$ の値を求めよ。(Solution only.)

2. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。(No need to simplify!)

   (a) $y = x^{100} - 50x + 1$

   (b) $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$

   (c) $y = (2x^2 + x + 1)(x^3 + 3x + 6)$

   (d) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

Quiz 6, 2003, 解答

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ とする。

(a) $f(x)$ の $x=2$ における微分係数 $f'(2)$ を定義にしたがって求めよ。途中の計算 (または説明) も書くこと。(Show work!)

解：左下の組み立て除法より $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3 = (x^2+5)(x-2) + 7$ かつ $f(2) = 7$ となっているので、次の変形が得られます。

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+5x-3-f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+5)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x^2+5 = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 5 & -3 \\ & & 2 & 0 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & \boxed{7} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & 5 & -3 \\ & & 3 & 3 & 24 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 8 & \boxed{21} \\ & & 3 & 12 & \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{20} & \end{array}$$

(b) $f(x) = a_3(x-3)^3 + a_2(x-3)^2 + a_1(x-3) + a_0$ (a_3, a_2, a_1, a_0 は数) と書く時、a_3, a_2, a_1, a_0 の中で、$f(3)$ はどれか、$f'(3)$ はどれか。また、$f'(3)$ の値を求めよ。(Solution only.)

解：$f(x) = a_3(x-3)^3 + a_2(x-3)^2 + a_1(x-3) + a_0$ と書いてあると、$f(3) = a_0$ は明らかです。$f'(3)$ は定義に従い計算すると、

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{a_3(x-3)^3 + a_2(x-3)^2 + a_1(x-3)}{x-3} = a_1$$

右上の組み立て除法より、$f(3) = a_0 = 21$。$f'(3) = a_1 = 20$ となります。

2. 次の関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ。

(a) $y = x^{100} - 50x + 1$

解：$y' = (x^{100} - 50x + 1)' = (x^{100})' - 50(x)' + (1)' = 100x^{99} - 50$

(b) $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$

解：$y' = (x^3 - 2x^2 + 5x - 3)' = 3x^2 - 4x + 5$

(c) $y = (2x^2 + x + 1)(x^3 + 3x + 6)$

解：解答は一番上だけで十分ですが、展開式も書いておきます。

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2+x+1)'(x^3+3x+6) + (2x^2+x+1)(x^3+3x+6)' \\ &= (4x+1)(x^3+3x+6) + (2x^2+x+1)(3x^2+3) \\ &= 10x^4 + 4x^3 + 21x^2 + 30x + 9 \end{aligned}$$

(d) $y = \dfrac{1}{x^2+x-2}$

解：商の微分を用いると、$y' = -\dfrac{(x^2+x-2)'}{(x^2+x-2)^2} = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}$

Quiz 6, 2002

1. 正しければ番号を ◯ で囲み、誤っていれば × をつけよ。

   (a) $f(x)$ が $x=a$ で微分可能でかつ $x=a$ で増加していれば $f'(a)>0$ である。

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在すれば、$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

2. 次の関数 $y=f(x)$ の導関数を求めよ。

   (a) $y=x^3-x$

   (b) $y=(x+1)(x^3-4x)$

   (c) $y=(x^2-2)e^{-x}$

   (d) $y=(3x^2+5)^8$

3. (a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ の $x=a$ における微分係数を定義にしたがって以下のように求める。この計算によって $f'(a)$ を求めよ。

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{a^2+1}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(a^2+1)-(x^2+1)}{(x-a)(x^2+1)(a^2+1)}$$

$$=$$

   (b) 上の結果を利用して $f(x)$ は $x=1$ で増加しているか減少しているか判断せよ。理由も述べること。

Quiz 6, 2002, 解答

1. 正しければ番号を ◯ で囲み、誤っていれば × をつけよ。

   (a) $f(x)$ が $x=a$ で微分可能でかつ $x=a$ で増加していれば $f'(a)>0$ である。
   解：×　$f(x)=x^3$ は $x=0$ で

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h^3-0}{h}=h^2>0 \text{ if } h\neq 0$$

   ですから増加していますが、$f'(0)=0$ になっています。

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在すれば、$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.
   解：◯　最初の極限は $f'(a)$ すなわち $x=a$ における微分係数でした。これが存在することは、$x=a$ で微分可能であることですが、その時は連続。すなわち 2 番目の式が成り立ちます。最初の極限が存在すると言うことは、分母が 0 になる時にも何らかの値に近づくということですから、それは分子も 0 に近づかないといけませんね。それを表していると考えても良いと思います。

2. 次の関数 $y=f(x)$ の導関数を求めよ。

   (a) $y=x^3-x$
   $$y'=(x^3-x)'=(x^3)'-(x^1)'=3x^2-1.$$

   (b) $y=(x+1)(x^3-4x)$
   $$\begin{aligned} y' &= ((x+1)(x^3-4x))'=(x+1)'(x^3-4x)+(x+1)(x^3-4x)' \\ &= x^3-4x+(x+1)(3x^2-4)=4x^3+3x^2-8x-4. \end{aligned}$$
   展開してから求めることもできます。展開すると、$x^4+x^3-4x^2-4x$。

   (c) $y=(x^2-2)e^{-x}$
   $$y'=((x^2-2)e^{-x})'=2xe^{-x}+(x^2-2)(e^{-x})'=2xe^{-x}+(x^2-2)e^{-x}(-1)=(2+2x-x^2)e^{-x}.$$

   (d) $y=(3x^2+5)^8$
   $$y'=((3x^2+5)^8)'=8(3x^2+5)^7(3x^2+5)'=8(3x^2+5)^7(6x)=48x(3x^2+5)^7.$$

3. (a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ の $x=a$ における微分係数を定義にしたがって以下のように求める。この計算によって $f'(a)$ を求めよ。
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{a^2+1}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(a^2+1)-(x^2+1)}{(x-a)(x^2+1)(a^2+1)} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{(x-a)(x^2+1)(a^2+1)}=\lim_{x\to a}\frac{(a-x)(a+x)}{(x-a)(x^2+1)(a^2+1)} \\ &= -\lim_{x\to a}\frac{x+a}{(x^2+1)(a^2+1)}=-\frac{2a}{(a^2+1)^2} \end{aligned}$$
   (b) 上の結果を利用して $f(x)$ は $x=1$ で増加しているか減少しているか判断せよ。理由も述べること。
   解：$f'(1)=-\dfrac{2\cdot 1}{(1^2+1)^2}=-\dfrac{1}{2}<0$ だから $x=1$ で減少。

Quiz 6, 2001

1. 次の関数 $y=f(x)$ の導関数を求めよ。

   (a) $y=x^3-3x$

   (b) $y=3x^4-4x^3-24x^2+48x-15$

   (c) $y=x^2e^{-x}$

   (d) $\sin x(1+\cos x)$

   (e) $y=(x^2-3x+1)^8$

   (f) $y=\dfrac{\sin x}{e^x}$

2. (a) 前問の (a) の関数 $y = f(x) = x^3 - 3x$ が減少している x の範囲を求めよ。

   (b) $y = f(x) = x^3 - 3x$ の $x = 3$ における接線の方程式を求めよ。接線とは、$(3, f(3))$ を通り傾きが $f'(3)$ の直線である。

Quiz 7, 2005

1. $f(x) = (x^2 + 1)^9$ の導関数を求めよ。

2. $\int (x^2 + 1)^9 dx = F(x) + C$ (C は積分定数）とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

3. $\int x(x^2 + 1)^8 dx$ を求めよ。

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int (4x^3 - x^2 + 6x - 1)dx$

   (b) $\displaystyle\int (\frac{6}{x^4} + \sqrt{x})dx$

   (c) $\displaystyle\int (\frac{1}{x} + 2e^{-2x})dx$

5. $p(x), q(x), r(x), s(x)$ についての記述のうちで正しいのはどれか。簡単に理由を記せ。

   (a) $p'(x) = q(x),\ q'(x) = r(x),\ r'(x) = s(x)$.

   (b) $q'(x) = p(x),\ p'(x) = s(x),\ s'(x) = r(x)$.

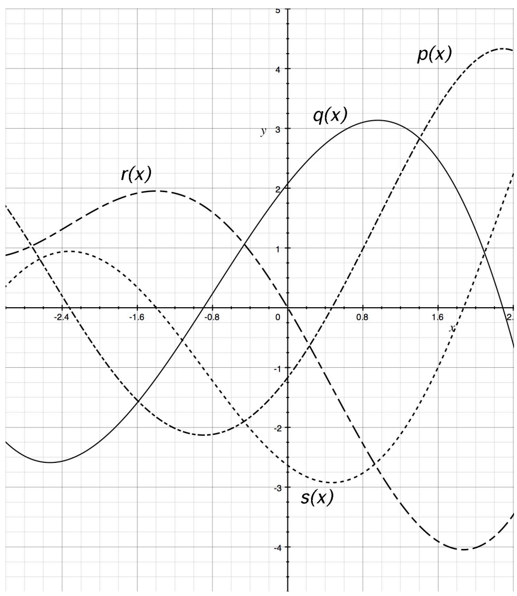
   (c) $r'(x) = s(x),\ s'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x)$.

   (d) $r'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x),\ q'(x) = s(x)$.

   (e) $s'(x) = r(x),\ r'(x) = q(x),\ q'(x) = p(x)$.

   (f) $s'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x),\ q'(x) = s(x)$.

   [理由]



Quiz 7, 2005, 解答

1. $f(x) = (x^2 + 1)^9$ の導関数を求めよ。

   解：$h(x) = x^2 + 1,\ g(X) = X^9$ とすると、$f(x) = g(h(x))$ だから、$f'(x) = g'(h(x))h'(x)$。ここで、$h'(x) = 2x,\ g'(X) = 9X^8$ だから、$f'(x) = 9(h(x))^8(2x) = 18x(x^2 + 1)^8$. となる。

2. $\int (x^2+1)^9 dx = F(x) + C$ (C は積分定数）とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

   解：不定積分の意味は、$(x^2+1)^9$ の原始関数全体をあらわすもので、$F(x)$ は原始関数の一つであった。原始関数は微分したら、$(x^2+1)^9$ になるものだったから、$F'(x) = (x^2+1)^9$。

3. $\int x(x^2+1)^8 dx$ を求めよ。

   解：微分したら、$x(x^2+1)^8$ になるもの、すなわち、$x(x^2+1)^8$ の原始関数を求めなければいけない。しかし、最初の問題から、導関数が、$18x(x^2+1)^8$ となるものは分かっている。そこで、
$$\int x(x^2+1)^8 dx = \frac{1}{18}\int 18x(x^2+1)^8 dx = \frac{1}{18}(x^2+1)^9 + C.$$

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\int (4x^3 - x^2 + 6x - 1)dx = \frac{4}{3+1}x^{3+1} - \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{6}{1+1}x^{1+1} - x + C$
   $= x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - x + C.$

   (b) $\int (\frac{6}{x^4} + \sqrt{x})dx = \int (6x^{-4} + x^{1/2})dx = \frac{6}{-4+1}x^{-4+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$
   $= -2x^{-3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + C.$

   (c) $\int (\frac{1}{x} + 2e^{-2x})dx = \log x - e^{-2x} + C.$
   $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$ となっていることに注意して下さい。

5. $p(x), q(x), r(x), s(x)$ についての記述のうちで正しいのはどれか。簡単に理由を記せ。

   解：(c) $r'(x) = s(x),\ s'(x) = p(x),\ p'(x) = q(x).$

   [理由]

   一般に $f'(x) = g(x)$ とすると、$f(x)$ が $x = a$ で極大や極小のとき、$f'(a) = g(a) = 0$ となっている。また、$g(x) > 0$ のところでは、$f(x)$ は増加、$g(x) < 0$ のところでは、$f(x)$ は減少である。

   この考え方から、$p'(x) = q(x)$ であることが分かる。$q'(x)$ となるものはない。これで、消去法で、(c) だけが可能である。他も確かめると、たしかに、条件を満たしている。

   一つ一つの条件を丁寧に確認してみて下さい。

Quiz 7, 2004

1. $f(x) = (e^x + x + 1)^8$ を $f(x) = g(h(x))$ の形に表したい。$h(x)$ および $g(X)$ はどのように定義したら良いか。

2. $f(x) = (e^x + x + 1)^8$ の導関数を求めよ。

3. $F(x) = \int_0^x (e^t + t + 1)^8 dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

4. $\int (e^x + 1)(e^x + x + 1)^7 dx$ を求めよ。

5. 次の計算をせよ。
   (a) $\displaystyle\int (x^3 + 2x - 10)dx$
   (b) $\displaystyle\int (\frac{4}{x^5} + \sqrt{x})dx$
   (c) $\displaystyle\int (\frac{1}{x} + e^{-x})dx$
   (d) $\displaystyle\int_0^2 (e^t + 1)dt$
   (e) $\displaystyle\int_0^2 t(t^2 - 3)dt$

Quiz 7, 2004, 解答

1. $f(x) = (e^x + x + 1)^8$ を $f(x) = g(h(x))$ の形に表したい。$h(x)$ および $g(X)$ はどのように定義したら良いか。

   解：$h(x) = e^x + x + 1$, $g(X) = X^8$. これ以外にも いろいろと答えはあります。簡単なのは、$h(x) = x$, $g(X) = (e^X + X + 1)^8$。複雑なのは、たとえば $h(x) = e^x + x$, $g(X) = (X + 1)^8$。これらすべて正解。でも、このようにすると次の問題は最初から考えないといけません。

2. $f(x) = (e^x + x + 1)^8$ の導関数を求めよ。

   解：前問の表記を使うと、合成関数の微分から $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$ ここで、$g'(X) = 8X^7$, $h'(x) = e^x + 1$ だから $f'(x) = 8(h(x))^7(e^x + 1) = 8(e^x + x + 1)^7(e^x + 1)$。

3. $F(x) = \int_0^x (e^t + t + 1)^8 dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

   解：$(e^t + t + 1)^8$ の原始関数を $G(t)$ とすると、$G'(x) = (e^x + x + 1)^8$。ここで、微分積分学の基本定理より

   $$F(x) = \int_0^x (e^t + t + 1)^8 dt = G(x) - G(0),\ \text{したがって}\ F'(x) = G'(x) = (e^x + x + 1)^8.$$

4. $\int(e^x+1)(e^x+x+1)^7dx$ を求めよ。

解：2 より $f(x)=(e^x+x+1)^8$ の導関数は $f'(x)=8(e^x+1)(e^x+x+1)^7$ だから、$\frac{1}{8}(e^x+x+1)^8$ の導関数は $(e^x+1)(e^x+x+1)^7$ となる。したがって、

$$\int(e^x+1)(e^x+x+1)^7dx=\frac{1}{8}(e^x+x+1)^8+C. \quad C \text{ は積分定数。}$$

5. 次の計算をせよ。（以下で C は積分定数。）

(a) $\displaystyle\int(x^3+2x-10)dx=\frac{1}{4}x^4+x^2-10x+C.$

(b) $\displaystyle\int(\frac{4}{x^5}+\sqrt{x})dx=\int(4x^{-5}+x^{\frac{1}{2}})dx=\frac{4}{-5+1}x^{-5+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$

$\displaystyle=-x^{-4}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C=-\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

(c) $\displaystyle\int(\frac{1}{x}+e^{-x})dx=\log x-e^{-x}+C.$

(d) $\displaystyle\int_0^2(e^t+1)dt=\Big[e^x+x\Big]_0^2=e^2+2-e^0=e^2+1.$

(e) $\displaystyle\int_0^2 t(t^2-3)dt=\left[\frac{1}{4}(t^2-3)^2\right]_0^2=\frac{1}{4}((2^2-3)^2-(-3)^2)=-2.$

この場合は、$t(t^2-3)=t^3-3t$ として積分する方が簡単。

Quiz 7, 2003

1. 次のそれぞれの関数を $f(x)=g(h(x))$ の形に表したい。$f(x)$, $h(x)$ をそれぞれ与えられたようにすると、$g(X)$ は何か。また、$f'(x)$ を求めよ。

(a) $f(x)=(x^2+x+1)^{100}$, $h(x)=x^2+x+1$。

$g(X)=$

$f'(x)=$

(b) $f(x)=e^{-x^4}$, $h(x)=-x^4$。

$g(X)=$

$f'(x)=$

2. $f(x)$ の導関数は $f'(x)=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$ であるとする。$f'(c)=0$ を満たす c は、-1 と 2 のみである。このとき、それぞれの点において $f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

(a) $x=1$

(b) $x=-1$

(c) $x=2$

Quiz 7, 2003, 解答

1. 次のそれぞれの関数を $f(x) = g(h(x))$ の形に表したい。$f(x)$, $h(x)$ をそれぞれ与えられたようにすると、$g(X)$ は何か。また、$f'(x)$ を求めよ。

   (a) $f(x) = (x^2 + x + 1)^{100}$, $h(x) = x^2 + x + 1$。

   $g(X) = X^{100}$. このようにすると、$X = h(x) = x^2 + x + 1$ を $g(X)$ の X に代入することにより $f(x) = g(h(x)) = g(X) = X^{100} = (x^2 + x + 1)^{100}$ となります。$f(x)$ を合成関数といいますが、どの関数とどの関数の合成なのかを見分けないといけません。合成関数の微分は $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$ となります。$g'(h(x))$ の部分は $g(X)$ を X の関数だと思い微分し、その X に $h(x)$ を代入するというもので、この場合は、$g'(X) = 100X^{99}$ ですから $g'(h(x)) = 100(x^2 + x + 1)^{99}$ となります。これに、$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ をかけたものが $f'(x)$ です。この場合は、$h'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$ ですから、$f'(x)$ は次のようになります。

   $f'(x) = 100(x^2 + x + 1)^{99}(2x + 1)$

   (b) $f(x) = e^{-x^4}$, $h(x) = -x^4$。

   $g(X) = e^X$ ですから $g'(X) = e^X$ すなわち、$g'(h(x)) = e^{-x^4}$。また、$h'(x) = -4x^3$ ですから、

   $f'(x) = e^{-x^4}(-4x^3) = -4x^3e^{-x^4}$

   合成関数の微分については、Handout を参照して下さい。例にもこれをもちいるものがあると思います。

2. $f(x)$ の導関数は $f'(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$ であるとする。$f'(c) = 0$ を満たす c は、-1 と 2 のみである。このとき、それぞれの点において $f(x)$ は増加か、減少か、極大か、極小かを決定せよ。理由も記せ。(Show work!)

   (a) $x = 1$

   解：$f'(1) = 1 - 5 + 6 + 4 - 8 = -2 < 0$ ですから $f(x)$ は $x = 1$ で減少しています。

   (b) $x = -1$

   解：問題の中にも書いてあるように、$f'(-1) = 0$ となっています。$f'(x)$ は x が $-\infty$ の方にいくと、x^4 がとても大きな正の数になりますから、$f'(x) = 0$ は $x = -1, 2$ と問題に書いてあるのを認めると、$x < -1$ では $f'(x) > 0$、$-1 < x < 2$ では、$f'(x) < 0$ であることが前問からわかります。したがって、$f(x)$ は、$x < -1$ では増加、$x > -1$ では減少に転じますから、$f(x)$ は $x = -1$ で極大となります。$f'(x)$ の符号が $x = -1, 2$ で区切られた 3 つの区間では、一定していないと中間値の定理により、$x = -1, 2$ 以外にも $f'(x)$ が $f'(x) = 0$ となる点をもつからです。$f''(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4$ ですから $f''(-1) = -4 - 15 - 12 + 4 = -27 < 0$ となり、これからも $x = -1$ で極大となることがわかります。

(c) $x = 2$

解：$f'(x)$ は x が ∞ の方へいくと $f'(x) > 0$ ですから、$-1 < x < 2$ では、$f'(x) < 0$、$2 < x$ では $f'(x) > 0$ ですから、$f(x)$ は $-1 < x < 2$ では減少、$2 < x$ では増加になります。したがって、$x = 2$ で $f(x)$ は極小となることがわかります。$f''(2) = 32 - 60 + 24 + 4 = 0$ となりますから、$f''(x)$ だけでは判定がつきません。$f'''(x) = 12x^2 - 30x + 12$, $f''''(x) = 24x - 30$ をもちいると、$f'''(2) = 48 - 60 + 12 = 0$、$f''''(2) = 48 - 30 = 12 > 0$ となっています。これより $f'''(x)$ は $x = 2$ の付近で増加。したがって $f'''(2) = 0$ より $f'''(x)$ は $x = 2$ で負から正に転じます。したがって、$f''(x)$ は $x = 2$ で減少から増加に転じます。$f''(2) = 0$ ですから、$f''(x)$ は $x = 2$ の付近では $x = 2$ を除いて正になっています。したがって、$f'(x)$ は増加しています。$f'(2) = 0$ ですから $f'(x)$ は $x = 2$ で負から正に転じます。これは、$f(x)$ が減少から増加に転じることを意味しますから、$x = 2$ で極小となります。

では、これらを表に書いてみましょう。

x		-1		1		2	
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	減少	$\searrow$	極小	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
$f''(x)$	$-$	-27	$-$		$+$	0	$+$
					$\searrow$		$\nearrow$
$f'''(x)$					$-$	0	$+$
						$\nearrow$	
$f''''(x)$						$+18$	

この問題はすこしやさしくするために $f'(x) = 0$ は $x = -1, 2$ のみと最初から情報を提供しておきました。じつは、$f'(x) = (x+1)(x-2)^3$ となっています。かつ、$f'(1)$ を (a) で求めるので、何回も微分して求めるより、$f'(-2)$ や、$f'(3)$ あたりを計算するなりしたほうが、簡単になっています。すなわち、$f'(x)$ が $x < -1$ では正、$-1 < x < 2$ では 負、$2 < x$ では正がわかると、すべての答が決まってしまうからです。しかし、もし、そのような情報が与えられていなければ、$f(x) = 0$ となる x をすべて求めないかぎり、何回も微分して値が零にならないところからスタートして議論する方法が有効になります。では、何回微分してもそこでの値が零ということはあるでしょうか。それは、$f(x) = 0$ しかないことが知られています。ということは、何回微分してもよい関数の場合は、何回も微分してその点での正負を決めることは有効な方法であることがわかります。

Quiz 7, 2002 以下の問題で $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数 (すなわち $f'(x)$ をさらに微分した関数)、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数 (すなわち $f''(x)$ をさらにもう一回微分した関数) を表すものとする。

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ とするとき以下の問いに答えよ。このとき、$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$ であることは用いて良い。

   (a) $f'(x) = 0$ となる x をすべて求めよ。

   (b) $f''(x)$ を求めよ。

   (c) (a) でもとめた各 x について、$f(x)$ は極大か、極小か、またはどちらでもないか判定せよ。

   (d) $-3 \leqq x \leqq 3$ で $f(x)$ の値が一番小さくなるのは x がいくつの時か。

2. $f(x) = e^{-x^2}$ が一番大きくなる時の x の値を求めよ。(a がどんな数であっても $e^a > 0$ である。)

3. 関数 $y = f(x)$ は $f'(c) = 0$、$f''(c) = 0$、$f'''(c) = -1$ を満たすとする。このとき、$x = c$ で $y = f(x)$ 増加しているか、減少しているか、極大になっているか、極小になっているか、どれでもないか。簡単に理由も書いて下さい。

Quiz 7, 2002, 解答

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ とするとき以下の問いに答えよ。このとき、$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$ であることは用いて良い。

   (a) $f'(x) = 0$ となる x をすべて求めよ。

   解：　$f'(x) = 12x(x-2)(x+1) = 0$ となるのは、$x = 0$, $x - 2 = 0$ または $x + 1 = 0$ のいずれかなので、$x = -1, 0, 2$ のいずれか。

   (b) $f''(x)$ を求めよ。

   解：　$f''(x) = (12x^3 - 12x^2 - 24x)' = 36x^2 - 24x - 24 = 12(3x^2 - 2x - 2).$

   (c) (a) でもとめた各 x について、$f(x)$ は極大か、極小か、またはどちらでもないか判定せよ。

   解：　$f''(-1) = 36 > 0$ より $x = -1$ で $f(x)$ は極小値 $f(-1) = -4$ をもつ。$f''(0) = -24 < 0$ より $x = 0$ で $f(x)$ は極大値 $f(0) = 1$ をもつ。また $f''(2) = 72 > 0$ より $x = 2$ で $f(x)$ は極小値 $f(2) = 48 - 32 - 48 + 1 = -31$ をもつ。

   (d) $-3 \leqq x \leqq 3$ で $f(x)$ の値が一番小さくなるのは x がいくつの時か。

   解：-3 から -1 までは減少し、$f(-1) = -4$、その後増大、$x = 0$ からまた減少に転じ、$x = 2$ で極小値 -31 をとり、以後増大するので、一番小さくなるのは、$x = 2$ のとき。

x		-1			0			2	
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\searrow$	極小	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	
$f''(x)$		$+$			$-$			$+$	

2. $f(x) = e^{-x^2}$ が一番大きくなる時の x の値を求めよ。(a がどんな数であっても $e^a > 0$ である。)

   解： $f'(x) = -2xe^{-x^2}$。$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2xe^{-x^2}) = (4x^2-2)e^{-x^2}$。これより $f'(x) = -2xe^{-x^2} = 0$ となるのは、$x = 0$ の時のみ、このとき、$f''(0) = -2e^0 = -2 < 0$ だから、$x = 0$ で極大となり、ここで $f(x)$ は一番大きくなる。

3. 関数 $y = f(x)$ は $f'(c) = 0$、$f''(c) = 0$、$f'''(c) = -1$ を満たすとする。このとき、$x = c$ で $y = f(x)$ 増加しているか、減少しているか、極大になっているか、極小になっているか、どれでもないか。簡単に理由も書いて下さい。

   解： 減少。$f'''(c) - 1 < 0$ だから $f''(x)$ は $x = c$ で減少。$f''(c) = 0$ だから、$f''(x)$ は $x = c$ で正から負に転じる。すなわち、$f'(x)$ は $x = c$ で増加から減少に転じる。$f'(c) = 0$ だから $f'(x)$ は $x = c$ の近くでは、負。すなわち、$f(x)$ は $x = c$ で減少している。

Quiz 7, 2001 以下の問題で $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数、$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数 (すなわち $f'(x)$ をさらに微分した関数)、$f'''(x)$ は $f''(x)$ の導関数 (すなわち $f''(x)$ をさらにもう一回微分した関数) を表すものとする。

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ とする。
   (a) $f''(x)$ を求めよ。 [1pt]
   (b) $f(x)$ が極大、極小をとる x の値を求め、その点で極大か極小か判定せよ。[2pt]
   (c) $-6 \leqq x \leqq 6$ で $f(x)$ の値が一番大きくなるのは x がいくつの時か。 [1pt]
2. $f(x) = x^2e^{-x}$ とする。
   (a) $f''(x)$ を求めよ。 [1pt]
   (b) $f(x)$ が極大、極小をとる x の値を求め、その点で極大か極小か判定せよ。[2pt]
   (c) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。 [1pt]
3. 関数 $y = f(x)$ は $f'(c) = 0$、$f''(c) = 0$、$f'''(c) = 1$ を満たすとする。このとき、$x = c$ で $y = f(x)$ は極大にも極小にもならないことを証明せよ。 [2pt]

Quiz 8, 2005

1. $f(x) = e^{-5x^2}$ の導関数を求めよ。
2. $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-5x^2}dx$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。
3. $\displaystyle\int_0^1 x \cdot e^{-5x^2}dx$ を求めよ。

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(4x^3-3x^2+2x-1)dx$

   (b) $\displaystyle\int_{1}^{4}\Big(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)dx$

   (c) $\displaystyle\int_{1}^{2}\Big(\frac{1}{x}-10e^{-5x}\Big)dx$

5. $y=f(x)$ とし、次は x 年後の日本の人口の推移を予測する一つのモデルを表す微分方程式である。

$$y'=\frac{dy}{dx}=k\cdot x\cdot y \qquad (k\ \text{は定数}),\ f(0)=127,710,000.$$

   (a) この微分方程式を解き、$y=f(x)$ を求めよ。

   (b) $k=-0.0002$ として、このモデルを用いて、100 年後の人口を予測せよ。必要なら $e=2.7$ を用いよ。

Quiz 8, 2005, 解答

1. $f(x)=e^{-5x^2}$ の導関数を求めよ。

   解：$h(x)=-5x^2$, $g(X)=e^X$ とすると $f(x)=g(h(x))$ だから、

$$f'(x)=g'(h(x))h'(x)=e^{-5x^2}\cdot(-5x^2)'=-10x\cdot e^{-5x^2}.$$

2. $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-5x^2}dx$ は e^{-5x^2} の原始関数の一つだから、$F'(x)=e^{-5x^2}$。

3. $\displaystyle\int_0^1 x\cdot e^{-5x^2}dx=-\frac{1}{10}\int_0^1(-10x\cdot e^{-5x^2})dx=-\frac{1}{10}\Big[e^{-5x^2}\Big]_0^1=-\frac{1}{10}(e^{-5}-1).$

4. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(4x^3-3x^2+2x-1)dx$

$$=\Big[x^4-x^3+x^2-x\Big]_{-1}^{1}=(1-1+1-1)-(1+1+1+1)=-4.$$

   (b) $\displaystyle\int_{1}^{4}\Big(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)dx=\int_1^4\Big(-3x^{-4}+x^{-1/2}\Big)dx$

$$=\Big[\frac{-3}{-4+1}x^{-4+1}+\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-1/2+1}\Big]_1^4=\Big[\frac{1}{x^3}+2\sqrt{x}\Big]_1^4=\frac{1}{64}+4-1-2=\frac{65}{64}.$$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \Big(\frac{1}{x} - 10e^{-5x}\Big)dx = \Big[\log x + 2e^{-5x}\Big]_1^2 = \log 2 + 2e^{-10} - 2e^{-5}$

5. $y = f(x)$ とし、次は x 年後の日本の人口の推移を予測する一つのモデルを表す微分方程式である。

$$y' = \frac{dy}{dx} = k \cdot x \cdot y \qquad (k \text{ は定数}),\ f(0) = 127,710,000.$$

(a) この微分方程式を解き、$y = f(x)$ を求めよ。解：

$$\int \frac{1}{y}dy = \int k \cdot xdx \text{ より } \log y = \frac{k}{2}x^2 + C.$$

従って、$f(x) = y = e^{kx^2/2+C}$。$f(0) = e^C$ だから $f(x) = 127710000e^{kx^2/2}$.

(b) $k = -0.0002$ として、このモデルを用いて、100 年後の人口を予測せよ。必要なら $e = 2.7$ を用いよ。

解：$x = 100$ のとき、$kx^2/2 = -0.0002 \cdot 10000/2 = -1$. だから

$$f(100) = 127710000e^{-1} \sim 127710000/2.7 = 47,300,000.$$

Quiz 8, 2003

1. $f(x) = (x^2+1)^{10}$ の導関数を求めよ。

2. $F(x) = \int_0^x (t^2+1)^{10}dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

3. $\int x(x^2+1)^9 dx$ を求めよ。

4. $g'(x) = 5x^4 + 2x + 1$、$g(1) = 4$ であるとき $g(x)$ を求めよ。

5. 次の計算をせよ。

(a) $\displaystyle\int (x^3 + 5x - 3)dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^3}dx$

(c) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + e^x)dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 (3x^2 + 1)dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 (2x-3)^5 dx$

Quiz 8, 2003, 解答

1. $f(x) = (x^2+1)^{10}$ の導関数を求めよ。

   解：$g(X) = X^{10}$, $X = h(x) = x^2+1$ とすると $f(x) = g(h(x))$。$g'(X) = 10X^9$, $h'(x) = 2x$。したがって、

   $$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 10(x^2+1)^9(2x) = 20x(x^2+1)^9.$$

2. $F(x) = \int_0^x (t^2+1)^{10}dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

   解：微積分学の基本定理により、$F'(x) = (x^2+1)^{10}$ となる。

3. $\int x(x^2+1)^9 dx$ を求めよ。

   解：最初の問題で $f'(x) = 20x(x^2+1)^9$ であることに注意すると、$\frac{1}{20}(x^2+1)^{10}$ の導関数は $x(x^2+1)^9$ となることがわかる。したがって、

   $$\int x(x^2+1)^9 dx = \int (\frac{1}{20}(x^2+1)^{10})'dx = \frac{1}{20}(x^2+1)^{10} + C.$$

4. $g'(x) = 5x^4+2x+1$、$g(1) = 4$ であるとき $g(x)$ を求めよ。

   解：$g(x) = x^5+x^2+x+C$ と書けるから、$4 = g(1) = 3+C$ より $C = 1$。これより、$g(x) = x^5+x^2+x+1$ を得る。

5. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int (x^3+5x-3)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$

   (b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^3}dx = \int 2x^{-3}dx = \frac{2}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{x^2} + C$

   (c) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+e^x)dx = \int (x^{1/2}+e^x)dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1} + e^x + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + e^x + C$

   (d) $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+1)dx = \left[x^3+x\right]_1^2 = 8+2-1-1 = 8$

   (e) $\displaystyle\int_1^2 (2x-3)^5 dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x-3)^5(2x-1)'dx = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{6}(2x-3)^6\right]_1^2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$

Quiz 8, 2002

1. $f(x) = (x^2+1)e^{x^2}$ の導関数を求めよ。

2. $F(x) = \int_0^x (t^2+1)e^{t^2}dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

3. $\int x(x^2+2)e^{x^2}dx$ を求めよ。

4. $g'(x) = 2x^3 - x$、$g(0) = 1$ であるとき $g(x)$ を求めよ。

5. 次の計算をせよ。

   (a) $\displaystyle\int (x^7 + 2x^5 - x + 1)dx$

   (b) $\displaystyle\int (e^x + \frac{1}{x^2})dx$

   (c) $\displaystyle\int (3x+2)^4 dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)dx$

   (e) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}dx$

Quiz 8, 2002, 解答

1. $f(x) = (x^2+1)e^{x^2}$ の導関数を求めよ。

   解： 積の微分を使います。$g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = e^{x^2}$ とおくと、まず、$g'(x) = 2x$、さらに $h(x)$ の方は、合成関数と考えると、$(x^2)' = 2x$ ですから、$h'(x) = e^{x^2}(2x)$ となります。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = (x^2+1)'e^{x^2} + (x^2+1)(e^{x^2})' \\ &= 2xe^{x^2} + (x^2+1)e^{x^2}(2x) = 2x(x^2+2)e^{x^2}. \end{aligned}$$

2. $F(x) = \int_0^x (t^2+1)e^{t^2}dt$ とするとき、$F'(x)$ を求めよ。

   解： 微分積分学の基本定理より、$F(x)$ は $(x^2+1)e^{x^2}$ の原始関数だから $F(x)$ の導関数は $F'(x) = (x^2+1)e^{x^2}$ となる.

3. $\int x(x^2+2)e^{x^2}dx$ を求めよ。

   解： 1 より、$(x^2+1)e^{x^2}$ の導関数が $2x(x^2+2)e^{x^2}$ であった。これは、$2x(x^2+2)e^{x^2}$ の原始関数が、$(x^2+1)e^{x^2}$ を表している。したがって、その 1/2 の $x(x^2+2)e^{x^2}$ の原始関数は、$\frac{1}{2}(x^2+1)e^{x^2}$ したがって、

$$\int x(x^2+2)e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+2)e^{x^2}dx = \frac{1}{2}(x^2+1)e^{x^2} + C.$$

   以下のすべてで次の式は基本的である。

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \ \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

4. $g'(x) = 2x^3 - x$、$g(0) = 1$ であるとき $g(x)$ を求めよ。

解：　微分して $2x^3 - x$ となる関数の一つが、$\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ だから、$2x^3 - x$ の原始関数である $g(x)$ は $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C$ と書ける。ここで、$g(0) = 1$ より、$C = 1$。結果として、$g(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 = \frac{1}{2}(x^4 - x^2 + 2)$ を得る。

5. 次の計算をせよ。

(a) $\displaystyle\int (x^7 + 2x^5 - x + 1)dx = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$
（注：1 の原始関数は x です。）

(b) $\displaystyle\int (e^x + \frac{1}{x^2})dx = e^x - \frac{1}{x} + C,$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ ですから $\frac{x^{-1}}{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$ がこの原始関数です。

(c) $\displaystyle\int (3x+2)^4 dx = \frac{1}{15}(3x+2)^5 + C = \frac{81}{5}x^5 + 54x^4 + 72x^3 + 48x^2 + 16x + C'$ 展開を先にするとあとに書いた答えになります。

(d) $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

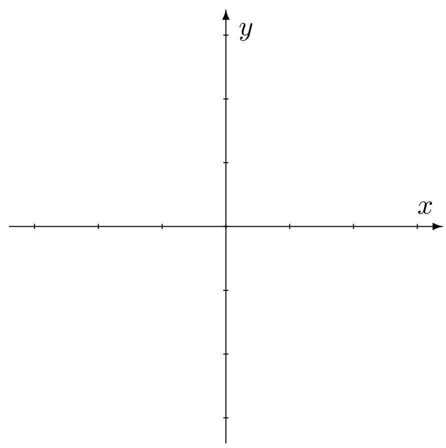
(e) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{1/2}dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$
（注：$4^{3/2} = ((2^2)^{1/2})^3 = 2^3 = 8$）

Quiz 8, 2001

1. $y = f(x)$ は $y' = f'(x) = 3x^2 - 1$ を満たすとする。

(a) $f(0) = 1$ のとき $f(x)$ を求めよ。

(b) $f(0) = 1$ を満たす $y = f(x)$ のグラフと、$f(1) = 2$ を満たすもののグラフと、$f(-1) = -1$ を満たすもののグラフをあわせて三つ描け。



2. $f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$ が $f(1) = 1,\ f'(1) = -2,\ f''(1) = 6,\ f'''(1) = -4$ を満たす時 a, b, c, d を求めよ。$f''(x)$ は $f(x)$ を 2 回微分したもの $f'''(x)$ は 3 回微分したものである。

3. 次の不定積分を求めよ。
   (a) $\int \left(x^2 + 1 + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$
   (b) $\int \sin(5x + 1) dx$
   (c) $\int (3x + 2)^{10} dx$
   (d) $\int x^2(x - 1)e^{-3x} dx$ (Hint $y = x^3 e^{-3x}$)