Review Test for Final Exam 2014/5

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を付けよ。True (◯) or False (×).

1. 命題 p, q, r において次の式が成り立つ。The following is valid for all statements p, q, r.

$$\neg(p \wedge q) \vee r \equiv ((\neg p) \vee r) \wedge ((\neg q) \vee r).$$

2. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}$ は無限に存在する。Let A be an $n \times n$ matrix. If a matrix equation $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ has infinitely many solutions, so is $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ for every $n \times 1$ matrix (column vector) $\boldsymbol{b}$.

3. A を $m \times n$ 行列で $m < n$ とする。このとき、行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は常に無限個の解を持つ。Let A be an $m \times n$ matrix with $m < n$. Then a matrix equation $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ has infinitely many solutions.

4. 関数 $f(x)$ において、$f'(c) = 0$ かつ $f''(c) = 0$ とする。このとき、$f(x)$ は $x = c$ で増加しているか減少しているか、$f(x)$ が定数関数であるかのいずれかで $x = c$ で極大や、極小になることはない。Let $f(x)$ be a function such that $f'(c) = 0$ and $f''(c) = 0$. Then $f(x)$ is either increasing, decreasing or a constant at $x = c$, and $f(c)$ cannot be a local extremum.

5. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば、$F(e^x)$ は $f(e^x)e^x$ の原始関数である。If $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$, then $F(e^x)$ is an antiderivative of $f(e^x)e^x$.

II. 次の問いに答えよ。Answer the following.

1. $(p \Rightarrow q) \vee ((\neg r) \wedge q)$ の真理表を作れ。Write a truth table of $(p \Rightarrow q) \vee ((\neg r) \wedge q)$. [1]

2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。Fnd a 3×3 matrix satisfying the following.

$$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -3a + b \\ a + c \end{bmatrix}$$

3. A, B を下のような行列とすとき、積 AB および BA を求めよ。Find BA and AB. [2]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. 前問の A は可逆かどうか（逆行列をもつかどうか）判定せよ。Determine whether or not the matrix A in the previous problem is invertible. [3]

---

[1] II-1: same as $p \Rightarrow q$, i.e., TTFFTTTT from top in standard order

[2] II-2: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, II-3: $AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

[3] II-4: $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ これより可逆。

5. 次の行列を連立一次方程式の拡大係数行列だとするとき、既約ガウス行列に変形し、解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ を求めよ。Find the reduced row echelon form of the matrix below and find the solutions $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. [4]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 多項式 $f(x)$ は $f(1) = 1$, $f(2) = -2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 12$ を満たす。$f(x)$ の次数を 3 とするとき $f(x)$ を求めよ。Find a polynomial $f(x)$ of degree three satisfying $f(1) = 1$, $f(2) = -2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 12$. [5]

7. 多項式 $g(x)$ で $g(1) = 1$, $g(2) = -2$, $g(3) = 4$, $g(4) = 12$ かつ次数が 4 のものは無限個あることを示せ。Show that there are infinitely many polynomials $g(x)$ of degree four satisfying $g(1) = 1$, $g(2) = -2$, $g(3) = 4$, $g(4) = 12$.

8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 4n + 4}{n^3 - 8}$ を求めよ。Find the limit.

9. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$ を求めよ。Find the limit. [6]

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)e^x - 1}{x}$ を求めよ。ただし、$e^0 = 1$ である。Find the limit.

    (Hint: Consider the definition of $f'(0)$ when $f(x) = (x+1)e^x$.)

11. $(3x^2 - 2)^{10}$ 導関数を求めよ。Find the derivative of $(3x^2 - 2)^{10}$.

12. $(x^3 - 2x + 1)e^{-3x^2}$ の導関数を求めよ。Find the derivative of $(x^3 - 2x + 1)e^{-3x^2}$.

13. $\displaystyle\int \left(x^2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx.$

14. $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$

15. $\displaystyle\int x(3x^2 - 2)^9 dx.$

16. $\displaystyle F(x) = \int_0^x t(3t^2 - 2)^9 dt.$ としたとき、$F(x)$ の導関数を求めよ。Find the derivative of $F(x)$.

17. $y = f(x) = ce^{ax} + de^{bx}$ $(a, b, c, d$ は定数で $a \neq b)$ とする。$y'' - 2y' - 3y = 0$、かつ $f(0) = 2$, $f'(0) = 2$ を満たす、$y = f(x)$ を一つ求めよ。Let $y = f(x) = ce^{ax} + de^{bx}$, where a, b, c, d are constants. Suppose $y'' - 2y' - 3y = 0$ and $f(0) = 2$, $f'(0) = 2$. Find a function $y = f(x)$ with these properties. [7]

---

[4] II-5: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x_1 = -2s+5t-u-2, x_2 = s, x_3 = -2t+u, x_4 = -2t+u-5, x_5 = t, x_6 = u$

[5] II-6: $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} - 2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 4\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 12\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$. II-7. 前問の $f(x)$ を用いると、$f(x) + a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, $a \neq 0$ はすべて条件をみたす。a は無限個の可能性がある。II-8. 3.

[6] II-9:0, II-10:2, II-11: $60x(3x^2-2)^9$, II-12:$(3x^2-2)e^{-3x^2} + (x^3-2x+1)e^{-3x^2}(-6x) = (-6x^4+15x^2-6x-2)e^{-3x^2}$ II-13:$\frac{1}{3}x^3 - 2\log_e|x| - \frac{1}{x} + C$, II-14: $\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}\right]_1^4 = \frac{20}{3}$.

[7] II-15:use II-11 to find $\frac{1}{60}(3x^2-2)^{10} + C$, II-16: $x(3x^2-2)^9$, II-17: $y = e^{3x} + e^{-x}$.

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。Answer each of the following.

1. 下の行列 C の逆行列を求めよ。またその逆行列をもちいて、右下の連立一次方程式の解を求めよ。Find the inverse of the matrix C below, and solve the system of linear equation. [8]

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 & & -x_3 & -3x_4 & = & 1 \\ x_1 & & -x_3 & -2x_4 & = & 2 \\ & x_2 & & +x_4 & = & -3 \\ & -2x_2 & +x_3 & -4x_4 & = & -1 \end{cases}$$

2. $f'(x) = x^2(x-1)(x-5) = x^4 - 6x^3 + 5x^2$ かつ $f(0) = 1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。また、$x = 0, 1, 5$ におて $f(x)$ が極大か、極小か、増加しているか、減少しているかを決定せよ。Find a function $f(x)$ satisfying $f'(x) = x^2(x-1)(x-5) = x^4 - 6x^3 + 5x^2$ and $f(0) = 1$. Determine whether $f(x)$ has a local maximum, a local minimum, increasing or decreasing at $x = 0, 1, 5$. [9]

3. Hamming 符号（Day 11 で説明したもの）は、2 進 4 桁の情報 (0, 1 が四つ並んだもの $\boldsymbol{a}$ に、次の行列 G を右からかけ、

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0$$

の計算規則で求めた $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$ を符号としたものである。ノイズで一箇所 0 が 1 または、1 が 0 になっても、行列 H を利用することにより、ノイズが入る前の $\boldsymbol{c}$ を復元することができる。この符号に関して次の問いに答えよ。ただし、G, H を以下の行列とする。

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Let $\boldsymbol{a}$ be a binary data with 4 digits. An encoder sends $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}G$, and a receiver receives a code with possible errors. If there is at most one error in a code word, the receiver can recover the original data by this system called the Hamming code. Answer the following questions.

(a) この符号を使って符号化したもののどこか一箇所ノイズが入り、(1010010) となった。もともとの符号は何だったか。Suppose you received (1010010) and know that an error occurred in one place changing 1 to 0 or 0 to 1. What is the original data?

(b) (1010101) を受け取ったとする。もともとの符号は何であった可能性が高いか。What is the most provable original code if you received (1010101)?

---

[8]III-1: $C^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad x_1 = -1, x_2 = -4, x_3 = -5, x_4 = 1$,

[9]III-2: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 1$, 0 で増加、1 で極大、5 で極小。III-3: (a) (1011010), (b) (1010101).