February 27, 2008

Final Exam of NSIB AY2007/8

解答用紙に ID と名前を書いて下さい。所定の場所以外に解答を書くときはそのことを明記してください。 (5pts$\times$ 20)

I. 次の問題の解答を解答欄の決められた場所に書いて下さい。

1. 解答欄の、$p \Rightarrow (\neg(q \vee r))$ と $\neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ の真理表を完成し、これらの命題が等値（真理値がいつも等しい）かどうか判定せよ。

2. 関数 $f(x)$ とその高階導関数（何回か微分した関数）について、以下の記述のうち、正しいものには、◯ を、誤っているものには、$\times$ を解答欄に記入せよ。ただし、$f(x)$、$f'(x)$、$f''(x)$、$f'''(x)$ はすべての x について微分可能とする。

   (a) $f(x)$ が $x = c$ で極小ならば、$f'(c) = 0$ かつ $f''(c) > 0$ である。

   (b) $f'(c) = 0$ かつ $f''(c) > 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ で極小となる。

   (c) $f'(c) = f''(c) = f'''(c) = 0$ かつ $f''''(c) > 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ で増加している。

   (d) $(f(x))^2$ の導関数は $2f'(x)$ である。

   (e) $f'(x)$ はすべての $x = c$ に関して連続、すなわち、$\lim_{x\to c} f'(x) = f'(c)$ である。

II. 次の問いに答え、途中式もふくめ、解答欄の決められた場所に書いて下さい。(Show work!)

3. x と y を論理式とするとき $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ を表すものとする。このとき、$p \Rightarrow q$ を p, q および $\downarrow$ と 括弧のみを用いて表せ。$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ は用いないこと。(Hint: Quiz 1 問題 2 参照)

4. 多項式 $f(x)$ で、$f(-2) = f(4) = f(7) = 0$ かつ、$f(-5) = -5$ かつ $f(1) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 以下のものと、次数が 5 のものを一つずつ書け。

5. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12 = q(x)(x-2) + r = c_4(x-2)^4 + c_3(x-2)^3 + c_2(x-2)^2 + c_1(x-2) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

6. $g(x)$ はその導関数 $g'(x)$ が前問 (問題 5) の $f(x)$ すなわち $g'(x) = f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12$ となっているものとする。このとき、$g''(x)$, $g'''(x)$ を求めよ。

7. $g(x)$ は前問 (問題 6) の関数とする。このとき、$g(x)$ は $x = 2$ で 増加しているか、減少しているか、極大か極小かを決定し、理由も述べよ。

8. $f(x) = c_4(x-2)^4 + c_3(x-2)^3 + c_2(x-2)^2 + c_1(x-2) + c_0$ とする。このとき、$f(2) = c_0$, $f'(2) = c_1$, $f''(2) = 2c_2$, $f'''(2) = 6c_3$, $f''''(2) = 24c_4$ であることを示せ。

9. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ とする。このとき、 $f(x)$ の $x = -2$ における微分係数 $f'(-2)$ を求め $f(x)$ が $x = -2$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も述べよ。

10. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x^3 - 13x^2 + 16x - 4}{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12}$ を求めよ。

11. $f(x) = (e^x + 1)^{100}$ とする。この関数を合成関数 $f(x) = h(g(x))$ として表し導関数を求めたい。$g(x)$, $h(x)$ および $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

12. xe^{-3x^2} の導関数を求めよ。

13. $x > 0$ のときに $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{2}{x} - 1 + 2e^{2x}$ となる関数 $f(x)$ ($f'(x)$ の原始関数) を一つ求めよ。

14. $\sqrt{x} + 3\log x + 1 + \dfrac{1}{x^3}$ の導関数を求めよ。

15. $y = e^{cx}$ が微分方程式 $y'' - y' - 6y = 0$ を満たすとき定数 c を求めよ。この結果を用いて、$y = f(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}$ (a, b, c_1, c_2 は定数) が、$y'' - y' - 6y = 0$ および $f(0) = 5$, $f'(0) = 5$ を満たすように a, b, c_1, c_2 を決定せよ。

III. 左下の行列 B に行に関する基本変形を (1) で一回、(2) で一回、(3) では三回おこない右下の行列 D を得た。次の問題の解答を解答欄の決められた場所に書いて下さい。

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$B \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} = D$$

16. 上の (1), (2), (3) で行った基本変形を $[i; c]$ (i 行を c 倍), $[i, j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i, j; c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。(3) においては三つの基本変形を行っていることに注意せよ。

17. 上の (1), (2), (3) で行った変形は、ある行列を左からかけることによっても得られる。その行列をそれぞれ、P_1, P_2, P_3 とする。P_1, P_2, P_3 を書け。答のみでよい。

18. 前問 (問題 17) の P_1, P_2, P_3 の逆行列をそれぞれ求めよ。答のみでよい。

19. 上の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。B を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ。

20. 行列方程式 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で解 $\boldsymbol{x}$ が存在しないような $\boldsymbol{b}$ があることを示せ。

鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)

NSIB FINAL 2007/8 解答用紙

Division: **ID#:** **Name:**

I-1.

p	q	r	$p \Rightarrow (\neg (q \vee r))$	$\neg ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

等値かどうかの判定：

2.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

メッセージ： 数学少しは楽しめましたか。苦しんだ人もいるかな。以下のことについて書いて下さい。

(A) この授業について。改善点など何でもどうぞ。

(B) ICU の教育一般について。改善点など、ICU に関すること何でもどうぞ。

No.	PTS.
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
17.	
18.	
19.	
20.	
Total	

II.

3. x と y を論理式とするとき $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ を表すものとする。このとき、$p \Rightarrow q$ を p, q および $\downarrow$ と 括弧のみを用いて表せ。$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ は用いないこと。(Hint: Quiz 1 問題 2 参照)

4. 多項式 $f(x)$ で、$f(-2) = f(4) = f(7) = 0$ かつ、$f(-5) = -5$ かつ $f(1) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 以下のものと、次数が 5 のものを一つずつ書け。

5. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12 = q(x)(x-2) + r = c_4(x-2)^4 + c_3(x-2)^3 + c_2(x-2)^2 + c_1(x-2) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

6. $g(x)$ はその導関数 $g'(x)$ が前問 (問題 5) の $f(x)$ すなわち $g'(x) = f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12$ となっているものとする。このとき、$g''(x)$, $g'''(x)$ を求めよ。

7. $g(x)$ は前問 (問題 6) の関数とする。このとき、$g(x)$ は $x = 2$ で 増加しているか、減少しているか、極大か極小かを決定し、理由も述べよ。

8. $f(x) = c_4(x-2)^4 + c_3(x-2)^3 + c_2(x-2)^2 + c_1(x-2) + c_0$ とする。このとき、$f(2) = c_0$, $f'(2) = c_1$, $f''(2) = 2c_2$, $f'''(2) = 6c_3$, $f''''(2) = 24c_4$ であることを示せ。

9. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ とする。このとき、 $f(x)$ の $x = -2$ における微分係数 $f'(-2)$ を求め $f(x)$ が $x = -2$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も述べよ。

10. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{3x^3 - 13x^2 + 16x - 4}{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12}$ を求めよ。

11. $f(x) = (e^x + 1)^{100}$ とする。この関数を合成関数 $f(x) = h(g(x))$ として表し導関数を求めたい。$g(x)$, $h(x)$ および $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

12. xe^{-3x^2} の導関数を求めよ。

13. $x > 0$ のときに $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{2}{x} - 1 + 2e^{2x}$ となる関数 $f(x)$ ($f'(x)$ の原始関数) を一つ求めよ。

14. $\sqrt{x} + 3\log x + 1 + \dfrac{1}{x^3}$ の導関数を求めよ。

15. $y = e^{cx}$ が微分方程式 $y'' - y' - 6y = 0$ を満たすとき定数 c を求めよ。この結果を用いて、$y = f(x) = c_1e^{ax} + c_2e^{bx}$ (a, b, c_1, c_2 は定数) が、$y'' - y' - 6y = 0$ および $f(0) = 5$, $f'(0) = 5$ を満たすように a, b, c_1, c_2 を決定せよ。

III.

16. 上の (1), (2), (3) で行った基本変形を $[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。(3) においては三つの基本変形を行っていることに注意せよ。

(1)

(2)

(3)

17. 上の (1), (2), (3) で行った変形は、ある行列を左からかけることによっても得られる。その行列をそれぞれ、P_1, P_2, P_3 とする。P_1, P_2, P_3 を書け。答のみでよい。

$P_1 =$ $\qquad$ $P_2 =$ $\qquad$ $P_3 =$

18. 前問 (問題 17) の P_1, P_2, P_3 の逆行列をそれぞれ求めよ。答のみでよい。

$P_1^{-1} =$ $\qquad$ $P_2^{-1} =$ $\qquad$ $P_3^{-1} =$

19. 上の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。B を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ。

20. 行列方程式 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で解 $\boldsymbol{x}$ が存在しないような $\boldsymbol{b}$ があることを示せ。

NSIB FINAL AY2007/8 Solutions

February 27, 2008

I.

1. $p \Rightarrow (\neg(q \vee r))$ と $\neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ の真理表による等値かどうかの判定。

p	q	r	p	$\Rightarrow$	$(\neg$	$(q$	$\vee$	$r))$	$\neg$	$((p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$r))$
T	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	T	T	F	F
T	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	F	F	T
F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	F	F	F

等値かどうかの判定：**等値**

2.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
×	◯	×	×	◯

II.

3. x と y を論理式とするとき $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ を表すものとする。このとき、$p \Rightarrow q$ を p, q および $\downarrow$ と 括弧のみを用いて表せ。$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ は用いないこと。(Hint: Quiz 1 問題 2 参照)

解：Quiz 1 問題 2 より、$\neg x = \neg(x \vee x) = x \downarrow x$, $x \vee y = \neg(x \downarrow y) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$, $x \wedge y = (\neg x) \downarrow (\neg y) = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$ だからすべて $\downarrow$ だけで表すことができる。

$$p \Rightarrow q = (\neg p) \vee q = (p \downarrow p) \vee q = ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q).$$

4. 多項式 $f(x)$ で、$f(-2) = f(4) = f(7) = 0$ かつ、$f(-5) = -5$ かつ $f(1) = 1$ を満たすものとする。次数が 4 以下のものと、次数が 5 のものを一つずつ書け。

解：次数が 4 以下のものは

$$f(x) = \frac{-5(x+2)(x-1)(x-4)(x-7)}{(-5+2)(-5-1)(-5-4)(-5-7)} + \frac{(x+5)(x+2)(x-4)(x-7)}{(1+5)(1+2)(1-4)(1-7)}.$$

次数が 5 のものは、上の $f(x)$ を用いて

$$f(x) + (x+5)(x+2)(x-1)(x-4)(x-7).$$

5. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12 = q(x)(x-2) + r = c_4(x-2)^4 + c_3(x-2)^3 + c_2(x-2)^2 + c_1(x-2) + c_0$ であるとき、多項式 $q(x)$, 定数 r および c_4, c_3, c_2, c_1, c_0 を求めよ。

解：組み立て除法を用いると良い。

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12 = (x^3 - 3x^2 - x + 6)(x-2) \\ &= (x-2)^4 + 3(x-2)^3 - (x-2)^2. \end{aligned}$$

したがって、$q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 6$, $r = 0$, $c_4 = 1$, $c_3 = 3$, $c_2 = -1$, $c_1 = 0$, $c_0 = 0$.

6. $g(x)$ はその導関数 $g'(x)$ が前問 (問題 5) の $f(x)$ すなわち $g'(x) = f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12$ となっているものとする。このとき、$g''(x)$, $g'''(x)$ を求めよ。

   解：$g''(x) = 4x^3 - 15x^2 + 10x + 8,\ g'''(x) = 12x^2 - 30x + 10.$

   別解として $g'(x) = f(x) = (x-2)^4 + 3(x-2)^3 - (x-2)^2$ を用いると、$g''(x) = f'(x) = 4(x-2)^3 + 9(x-2)^2 - 2(x-2)$, $g'''(x) = f''(x) = 12(x-2)^2 + 18(x-2) - 2$ を得る。

7. $g(x)$ は前問 (問題 6) の関数とする。このとき、$g(x)$ は $x = 2$ で 増加しているか、減少しているか、極大か極小かを決定し、理由も述べよ。

   解：問題 5 より $f(x) = (x-2)^4 + 3(x-2)^3 - (x-2)^2$ だから $g'(2) = f(2) = 0$. 同様に上の別解を用いると、$g''(2) = 0$, $g'''(2) = -2$ を得る。$g'''(2) < 0$ だから $g''(x)$ は $x = 2$ の付近で減少。よって $x < 2$ で $g''(x) > 0$, $x > 2$ で $g''(x) < 0$。よって $g'(x)$ は $x < 2$ で増加、$x > 2$ で減少、$g'(2) = 0$ だから $x = 2$ の付近で $x \neq 0$ では $g'(x) < 0$ よって $\underline{g(x)\ \text{は}\ x = 2\ \text{で減少している}}$。

8. $f(x) = c_4(x-2)^4 + c_3(x-2)^3 + c_2(x-2)^2 + c_1(x-2) + c_0$ とする。このとき、$f(2) = c_0$, $f'(2) = c_1$, $f''(2) = 2c_2$, $f'''(2) = 6c_3$, $f''''(2) = 24c_4$ であることを示せ。

   解：まず、$f(2) = c_0$ は明らか。上で使った議論を使えば合成関数の微分から、

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4c_4(x-2)^3 + 3c_3(x-2)^2 + 2c_2(x-2) + c_1, \\
f''(x) &= 12c_4(x-2)^2 + 6c_3(x-2) + 2c_2, \\
f'''(x) &= 24c_4(x-2) + 6c_3, \\
f''''(x) &= 24c_4.
\end{aligned}
$$

   したがって、$f'(2) = c_1$, $f''(2) = 2c_2$, $f'''(2) = 6c_3$, $f''''(2) = 24c_4$ を得る。

9. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ とする。このとき、 $f(x)$ の $x = -2$ における微分係数 $f'(-2)$ を求め $f(x)$ が $x = -2$ で増加しているか、減少しているか、極小か、極大か判定し、その理由も述べよ。

   解：商の微分を用いると、

$$
f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2},\ f'(-2) = -\frac{8}{25} < 0
$$

   だから $f(x)$ は減少している。

10. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x^3 - 13x^2 + 16x - 4}{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12}$ を求めよ。

   解：問題 5 と同じように分子を書き表すと $3x^3 - 13x^2 + 16x - 4 = 3(x-2)^3 + 5(x-2)^2$ となる。したがって

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{3x^3 - 13x^2 + 16x - 4}{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x - 12} &= \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)^3 + 5(x-2)^2}{(x-2)^4 + 3(x-2)^3 - (x-2)^2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2) + 5}{(x-2)^2 + 3(x-2) - 1} = -5.
\end{aligned}
$$

11. $f(x) = (e^x+1)^{100}$ とする。この関数を合成関数 $f(x) = h(g(x))$ を表し導関数を求めたい。$g(x)$, $h(x)$ および $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

解：$g(x) = e^x + 1$, $h(x) = x^{100}$ とおけばよい。$g'(x) = e^x$, $h'(x) = 100x^{99}$ だから

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = 100(e^x+1)^{99}e^x.$$

12. xe^{-3x^2} の導関数を求めよ。

解：積の微分を用いる。e^{-3x^2} の部分は合成関数の微分を用いて、$(e^{-3x^2})' = e^{-3x^2}(-6x)$ だから

$$(xe^{-3x^2})' = (x)'e^{-3x^2} + x(e^{-3x^2})' = e^{-3x^2} + xe^{-3x^2}(-6x) = e^{-3x^2}(1-6x^2).$$

13. $x > 0$ のときに $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{2}{x} - 1 + 2e^{2x}$ となる関数 $f(x)$ ($f'(x)$ の原始関数) を一つ求めよ。

解：$\frac{1}{x^4}$ は x^{-4} で x^n の原始関数は、$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ $(n \neq -1)$ で、x^{-1} の原始関数は $\log x$ だったから、C を任意の定数として、

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + 2\log x - x + e^{2x} + C.$$

14. $\sqrt{x} + 3\log x + 1 + \dfrac{1}{x^3}$ の導関数を求めよ。

解：

$$(\sqrt{x} + 3\log x + 1 + \frac{1}{x^3})' = (x^{1/2} + 3\log x + 1 + x^{-3})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{3}{x} - 3x^{-4}.$$

15. $y = e^{cx}$ が微分方程式 $y'' - y' - 6y = 0$ を満たすとき定数 c を求めよ。この結果を用いて、$y = f(x) = c_1e^{ax} + c_2e^{bx}$ (a, b, c_1, c_2 は定数) が、$y'' - y' - 6y = 0$ および $f(0) = 5$, $f'(0) = 5$ を満たすように a, b, c_1, c_2 を決定せよ。

解：$y' = ce^{cx}$, $y'' = c^2e^{cx}$ だから

$$0 = y'' - y' - 6y = c^2e^{cx} - ce^{cx} - 6e^{cx} = (c^2 - c - 6)e^{cx} = (c-3)(c+2)e^{cx}$$

$e^{cx} \neq 0$ だから $c = 3$ または $c = -2$ を得る。ここで $y = f(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ とおくと、この y も $y'' - y' - 6y = 0$ を満たす。$y' = 3c_1e^{3x} - 2c_2e^{-2x}$ だから $5 = f(0) = c_1 + c_2$ かつ、$5 = f'(0) = 3c_1 - 2c_2$。これより $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ を得る。したがって、$y = f(x) = 3e^{3x} + 2e^{-2x}$.

III. 左下の行列 B に行に関する基本変形を (1) で一回、(2) で一回、(3) では三回行い右下の行列 D を得た。次の問題の解答を解答欄の決められた場所に書いて下さい。

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$B \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} = D$$

16. 上の (1), (2), (3) で行った基本変形を $[i;c]$ (i 行を c 倍), $[i,j]$ (i 行と j 行の入れ換え), $[i,j;c]$ (i 行に j 行の c 倍を加える) を用いて表せ。(3) においては三つの基本変形を行っていることに注意せよ。

解：(1) $[1;-1]$（第 1 行を -1 倍。）(2) $[2,3]$（第 2 行と第 3 行を交換。）(3) $[2,1;-1]$, $[3,1;2]$, $[4,1;-2]$（第 2 行に第 1 行の -1 倍を加え、第 3 行に第 1 行の 2 倍を加え、第 4 行に第 1 行の -2 倍を加える。この場合は、どの順番でも良い。）

17. 上の (1), (2), (3) で行った変形は、ある行列を左からかけることによっても得られる。その行列をそれぞれ、P_1, P_2, P_3 とする。P_1, P_2, P_3 を書け。答のみでよい。

解：単位行列にそれぞれの基本変形を施したものと等しいから、

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

18. 前問 (問題 17) の P_1, P_2, P_3 の逆行列をそれぞれ求めよ。答のみでよい。

解：P を P_1, P_2, P_3 のいずれかとするとき $[P, I]$ に基本変形を施し $[I, Q]$ とすれば、$Q = P^{-1}$ であった。これらについては、簡単に求められるので、

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. 上の行列 B はある連立一次方程式の拡大係数行列であるする。B を既約ガウス行列に変形し、解 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ。

解：D にさらに基本変形を施すと

$$D \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

したがって $x_1 = 2s + 3$, $x_2 = -s + 16$, $x_3 = s$. $x_4 = -13$, s はパラメタである。

20. 行列方程式 $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で解 $\boldsymbol{x}$ が存在しないような $\boldsymbol{b}$ があることを示せ。

解：上で行った基本変形を行列 P をかけることによって行うものとする。$\boldsymbol{c}$ を 第 4 成分が 1 であとは、0 であるものとする。すると、PC は上の既約ガウス行列の左四列の部分だから $PC\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ は解を持たない。ここで $\boldsymbol{b} = P^{-1}\boldsymbol{c}$ とおけば、$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもたない。実際解をもつとすると、$PC\boldsymbol{x} = PP^{-1}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$ となり、矛盾である。実際 $b_1 + 3b_3 - b_4 \neq 0$ であればいつでも解をもたない。

鈴木寛 (hsuzuki@icu.ac.jp)