数学の方法（2001 年 6 月 19 日）

Final Exam

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。 (4pts×10)

1. 集合 A, B, C において $A \subset B \cup C$ ならば $A \subset B$ または $A \subset C$ である。
2. 集合 S, T において、S^c は補集合をあらわすものとする。すなわち全体集合を X としたとき $S^c = X - S$ また $S \triangle T = (S \cup T) - (S \cap T)$ とする。A, B, C を集合とする時、$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ である。
3. A を $n \times n$ の正方行列とする。行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が無限に存在すれば他の $\boldsymbol{b}'$ についても $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ となる $\boldsymbol{x}$ は無限に存在する。
4. $n < m$ のとき、n 個の $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を未知数とする m 個の連立一次方程式が無限個解を持つことはない。
5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ は逆行列をもつ。
6. $m \times n$ (m 行 n 列) の既約ガウス行列に 0 だけからなる行がなければ $m \leqq n$ である。
7. 多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ が $f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 1$ を満たせば a, b, c は一通りに決まる。
8. A, B を $n \times n$ の正方行列とする。A の逆行列を C、B の逆行列を D とすると、AB の逆行列は、CD である。
9. 区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f'(x) = 0$ となるのは、$x = c$ のときだけでそのとき、$f''(c) < 0$ であるとする。このとき、$f(c)$ は この区間のなかの $f(x)$ の最大値である。
10. $F'(x) = e^x \sin x$、$F(0) = 1$ となる関数は存在すればただ一つである。

II. 答えのみ解答欄に記入せよ。 (6pts×10)

1. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ の真理表を作れ。このことは何を意味しているか。(注意：p, q, r の値のとり方は全部で 8 通りあります。)
2. 次の条件をみたす 3×3 行列 T を一つ書け。$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c - 3a \\ b \end{bmatrix}$

3. 下のような x_1, x_2, x_3 に関する 3 個の連立一次方程式で解が無限にあるものを一組書け。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

4. $f(0) = 4$、$f(1) = 3$、$f(2) = -6$、$f(3) = 1$ を満たす多項式で次数が 3 以下のものを一つ求めよ。

5. 等比級数 $a_n = (-2/5)^{n-1}$ の無限和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ を求めよ。

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2-n-2}$ を求めよ。

7. $\dfrac{1}{(3x^2+1)^3}$ の $x = 1$ における微分係数を求めよ。

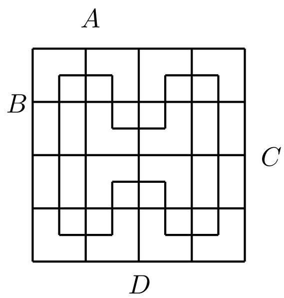
8. $(\sin x)e^{-3x^2}$ の導関数を求めよ。

9. $\displaystyle\int \sin(2-3x)dx$

10. $\displaystyle\int \frac{6x}{(3x^2+1)^4}dx$

III. 下のそれぞれの問題に解答せよ。 (10pts×5)

1. 右の図は、集合 A, B, C, D, H を表したものである。A は左 2 列、B は上 2 行、C は中 2 行、D は中 2 列、H は中央の H の形を下部分とする。このとき、解答欄の図の $(((A \triangle B) \triangle C) \triangle D) \triangle H$ の部分を斜線で表せ。



2. 左下の連立一次方程式の拡大係数行列に行の基本変形をして右下の行列を得た。この行列をさらに変形して既約ガウス行列を求め、この連立一次方程式の解を求めよ。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 &= b_4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ。

4. $f(x) = (x-c)^2 g(x) + d$ とする。$g(c) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = c$ で極小値 d を持つことを証明せよ。(ただし、$g(x)$ は何回でも微分できる関数とする。)

5. $f'(x) = x^3(x-2)(x+2) = x^5 - 4x^3$ かつ $f(0) = 1$ を満たす関数を求め、$f(x)$ が極大、極小をとる点を求め、この関数のグラフを描け。

数学の方法 — 略解

I.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
×	○	×	×	×	○	○	×	○	○

II.

1.

p	q	r	$((p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow r))$	$\Rightarrow$	$(p \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F
T	F	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F
F	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 3\frac{x(x-2)(x-3)}{1(1-2)(1-3)} - 6\frac{x(x-1)(x-3)}{2(2-1)(2-3)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)} \\ &= -\frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{3}{2}x(x-2)(x-3) + 3x(x-1)(x-3) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) \\ &= 4x^3 - 16x^2 + 11x + 4 \end{aligned}$$

5.

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{-2}{5}\right)} = \frac{5}{7}.$$

6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2-n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

7.

$$\left(\frac{1}{(3x^2+1)^3}\right)' = ((3x^2+1)^{-3})' = -3(3x^2+1)^{-4} \cdot (3x^2+1)' = -3(3x^2+1)^{-4} \cdot (6x) = \frac{-18x}{(3x^2+1)^4}$$

この式に $x = 1$ を代入して $-18/4^4 = -9/128$ が微分係数である。

8.

$$((\sin x)e^{-3x^2})' = (\cos x)e^{-3x^2} + (\sin x)e^{-3x^2}(-3x^2)' = (\cos x - 6x\sin x)e^{-3x^2}.$$

9.

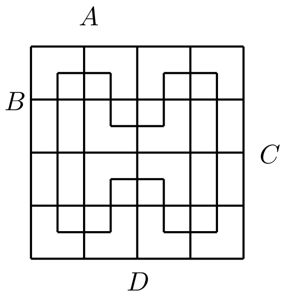
$$\int \sin(2-3x)dx = \frac{1}{3}\cos(2-3x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

10.

$$\int \frac{6x}{(3x^2+1)^4}dx = \int (3x^2+1)'(3x^2+1)^{-4}dx = -\frac{1}{3}(3x^2+1)^{-3} + C = -\frac{1}{3(3x^2+1)^3} + C \quad (C \text{ は定数})$$

III.

1.



左下の L 字形のブロックを斜線でぬりあとはすべて市松模様 (like Checker Board) に塗ったものが正解。

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.

$f(x) = (x-c)^2g(x) + d$ としたとき $f'(x) = 2(x-c)g(x) + (x-c)^2g'(x)$、$f''(x) = 2g(x) + 4(x-c)g'(x) + (x-c)^2g''(x)$ だから $f(c) = d$、$f'(c) = 0$ かつ $f''(c) = 2g(c) > 0$ である。したがって $f(x)$ は $x = c$ で極小値 d を持つ。

[別解] $f(c) = d$ でかつ $g(c) > 0$ だから c の近くでは $g(x) > 0$ 従って x が c の近くで c とは等しくないとすると $f(x) = (x-c)^2g(x) + d > d = f(c)$ だから $f(x)$ は $x = c$ で極小値 d を持つ。

5.

$f(x)$ の導関数が ($f(x)$ を微分すると) $f'(x) = x^5 - 4x^3$ だから $f(x) = \frac{x^6}{6} - x^4 + C$ と書ける。$f(0) = 1$ が仮定にあるから、$C = 1$ を得る。従って、$f(x) = \frac{x^6}{6} - x^4 + 1$、$f'(x) = x^5 - 4x^3 = x^3(x+2)(x-2)$、$f''(x) = 5x^4 - 12x^2 = x^2(5x^2 - 12)$、$f'''(x) = 20x^3 - 24x = 4x(5x^2 - 6)$、$f''''(x) = 60x^2 - 24$ である。これより $f'(x) = 0$ となるのは、$x = -2, 0, 2$ の 3 点である。$f''(-2) = f''(2) = 32 > 0$ だから $f(x)$ は $x = -2,\ 2$ で極小値をとる。$x = 0$ については $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ で $f''''(0) = -24 < 0$ だから、それぞれの増減をしらべると $f(x)$ は $x = 0$ で極大値をとることが分かる。グラフは滑らかな W 字型で中央の頂点の座標は $(0, 1)$ である。[グラフなどは略]