Solutions to Quiz 8

1. 二部グラフとはどんなグラフであるかを記し、また、二部グラフの閉路の長さは常に偶数であることを説明して下さい。What is a bipartite graph? Explain that the length of a closed path (circuit) in a bipartite graph is always even.

   Soln. 二部グラフとは、頂点を二つのグループ A と B に分け、A 同志、B 同志は隣接していないようにできるグラフのことである。閉路があったとすると、A の頂点同志、B の頂点同志は隣接していないから、隣接した頂点が連続している路においては、A の頂点の次は、B の頂点、B の頂点の次は A の頂点になる。したがって、閉路では、A の頂点を起点とすると、偶数番目に A の頂点となるので、最後に起点の A の頂点に戻る閉路の場合は、長さが偶数になる。

   A bipartite graph is a graph whose vertex set can be partitioned into two parts, say A and B, so that no vertices among A are adjacent and no vertices among B are adjacent. If there is a closed path, starting from a vertex in A, the next vertex is in B as it is adjacent to the first vertex, the next vertex is in A, and the next in B. So the 0th, 2nd, 4th, 6th, ... vertices are in A. Hence the length of a closed path is even.

2. 平面的二部グラフには、次数が 3 以下の頂点がかならずあることを示したい。定理を利用するときは、その主張または、ハンドアウトにおける定理の番号を必ず書いてください。In the following we want to show that every bipartite planar graph has a vertex of degree at most three. When you apply a result, please quote the statement or its number in the handout.

   (a) 辺の本数を e, 頂点数を v とし、すべての頂点の次数が 4 以上ならば、$e \geqq 2v$ となることを説明して下さい。Let e be the number of edges and v the number of vertices. Explain that if the degree of every vertex is at least four, then $e \geqq 2v$.
   Soln. 頂点を $x_1, x_2, \ldots, x_v$ とすると仮定から次数はすべて 4 以上なので握手の定理 (Theorem 5.1) より、次の式が得られる。Let $x_1, x_2, \ldots, x_v$ be vertices. Then by assumption, $\deg(x_1) \geqq 4$, $\deg(x_2) \geqq 4$, $\ldots, \deg(x_v) \geqq 4$. By Proposition 8.2 (i) or Theorem 5.1,

   $$2e = \deg(x_1) + \deg(x_2) + \cdots + \deg(x_v) \geqq \overbrace{4 + 4 + \cdots + 4}^{v \text{ terms}} = 4v.$$

   Therefore $e \geqq 2v$. 上の式より、$e \geqq 2v$ を得る。

   (b) 二部グラフを平面グラフに描いたときの面の数を f とすると、$e \geqq 2f$ であることを説明して下さい。Let f be the number of faces when a bipartite graph is drawn as a plane graph. Explain that $e \geqq 2f$.
   Soln. $F_1, F_2, \ldots, F_f$ を面、その面を囲む辺のかずをそれぞれ $n_1, n_2, \ldots, n_f$ とすると、閉路の長さは 3 以上で、かつ、問 1 より、長さは偶数だから、すべて 4 以上となる。したがって次の式を得る。Let $F_1, F_2, \ldots, F_f$ be faces. Let n_i be the number of edges surrounding F_i $(i = 1, 2, \ldots, f)$. Then by 1, $n_1 \geqq 4$, $n_2 \geqq 4$, $\ldots, n_f \geqq 4$. By Proposition 8.2 (ii),

   $$2e = n_1 + n_2 + \cdots + n_f \geqq \overbrace{4 + 4 + \cdots + 4}^{f \text{ terms}} = 4f.$$

   Therefore $e \geqq 2f$. これより、$e \geqq 2f$ を得る。

   (c) 最初の主張が成立することを説明して下さい。Explain that the first assertion holds.
   Soln. 背理法で示す。すべての頂点の次数が 4 以上だとすると、(a) より、$e \geqq 2v$。また (b) より $e \geqq 2f$ となる。オイラーの公式 (Theorem 8,1) を用いると By way of contradiction, assume that the degree of every vertex is at least four. Then by (a), $e \geqq 2v$, and by (b), $e \geqq 2f$. Hence by Euler's formula,

   $$2 = v - e + f \leqq \frac{1}{2}e - e + \frac{1}{2}e = 0.$$

   これは、矛盾であるので、ある頂点の次数は 3 以下である。This is a contradiction, and the assertion holds.