

## Solutions to Quiz 5

数学の世界のクラスにあるとき 105 人が出席していた。クラス内でメールアドレスの交換を行った。二人ずつお互いに交換するものとする。At a World of Mathematics class, 105 students attended. They exchanged email addresses each other.

1. 全員が丁度 5 人とメールアドレスの交換を行うことはあり得ないことを説明してください。Explain that it is impossible that everyone exchanged email addresses with exactly five students.

**Soln.** メールアドレスの交換によって、二人の人のメールアドレスが一つずつ増える。つまり、各人が得た、メールアドレスの総計は、メールアドレスの交換の回数の二倍になる。(Theorem 5.1 よりとしても良い。) したがって、偶数のはずである。しかし、105 人が丁度 5 人とメールアドレスの交換を行えば、各人が得た、メールアドレスの総計は、 $105 \times 5$  となりこれは、奇数である。これは、矛盾である。By an exchange of email addresses, the number of email addresses of two people increases by one. So the total number of email addresses increased is an even number. (Or by Theorem 5.1.) If 105 students obtained 5 email addresses, the total number of email addresses increased is  $105 \times 5$ , which is an odd number. This is a contradiction.

2. 2 年生以上はみな、6 人の一年生とメールアドレスの交換を行い、1 年生はみな、2 年生以上の 9 人とメールアドレスの交換をしたとする。1 年生の数は何人か。Suppose every sophomore or above exchanged email addresses with exactly 6 first year students, and every first year student exchanged email addresses with exactly 9 students who are sophomore or above. How many first year students were there in the class?

**Soln.** 1 年生の数を  $x$  とする。Let  $x$  be the number of first year students. 2 年生以上の数は、 $105 - x$  だから、Theorem 5.2 によって、次が成り立つ。Since there are  $105 - x$  students who are sophomore or above, by Theorem 5.2,

$$6(105 - x) = 9x. \text{ So, } 15x = 6 \cdot 105. \text{ Hence } x = 42.$$

従って、1 年生の数は、42 人である。Thus the number of first year students is 42.

3. 1 人とだけメールアドレスの交換をした人が一人はいることが分かっている。このとき、104 人とメールアドレスの交換をした人は、多くても一人だけであることを説明してください。It is known that there is a student who exchanged email addresses with exactly one student. Explain that there is at most one student who exchanged email addresses with exactly 104 students.

**Soln.** 104 人とメールアドレスの交換をした人が、2 人いたとする。この二人は、自分以外の全員とメールアドレスの交換をしたことになる。すると、この二人以外の人は全員が、この二人とメールアドレスの交換をしたことになるので、1 人とだけメールアドレスの交換をした人が一人はいることに矛盾する。したがって、104 人とメールアドレスの交換をした人は、多くても 1 人であることが分かる。

Suppose there are two students who exchanged email addresses with 104 students. Then these two exchanged email addresses with all students except themselves. This contradicts a fact that there is a student who exchanged email addresses with exactly one student. Therefore, there is at most one student who exchanged email addresses with exactly 104 students.