Solutions to Quiz 2

1. 自然数 9 を 4 個の自然数の和として表すとき、加える数の順序も考慮に入れて何通りの表し方があるか。 In how many ways can 9 be expressed as a sum of 4 positive integers if the order of terms are taken into consideration? (4pts)

   (a) 答えを ${}_nC_m$ の形で表せ。Express the number in the form ${}_nC_m$.

   Soln. ${}_8C_3$.

   (b) 理由を ${}_nC_m$ の意味だけを知っている人が理解できるように記せ。Explain the reason so that whoever knows the meaning of ${}_nC_m$ can understand.

   Soln. As below, this is same as the number of choices of three +'s among eight +'s expressing 9 as the sum of 1's.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} & & & \overset{1}{} & & \overset{2}{} & & \overset{3}{} & & \overset{4}{} & & \overset{5}{} & & \overset{6}{} & & \overset{7}{} & & \overset{8}{} & \\ 9 & = & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 \end{array}$$

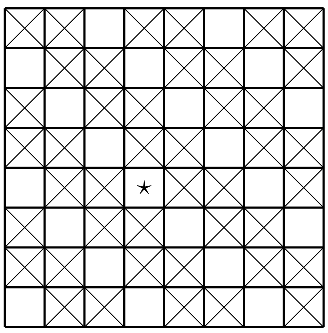
   9 を上のように 1 の 9 個の和に分けると、間に + が 8 個ある。この 8 個の + のうち 3 つを選ぶと、全体が 4 つの自然数の和になる。たとえば、3, 5, 8 番目の + を選べば

$$9 = 1+1+1\underline{+}1+1\underline{+}1+1+1\underline{+}1 = (1+1+1)+(1+1)+(1+1+1)+1 = 3+2+3+1.$$

   と 9 を自然数 4 つの和で表すことができる。9 を自然数 4 つの和で表すことは、このようにしてすべて得られるので、8 個の = から 3 個の + を選ぶ数と同じく、${}_8C_3$ となる。

2. 下のようなチェス盤から、$\star$ のところを取り除いたものは、1×3 の板では敷き詰められないことを説明せよ。Explain the fact that it is impossible to cover up the board without overlapping using 1×3 plates below. (6pts)

1	2		1	2		1	2
	1	2		1	2		1
2		1	2		1	2	
1	2		1	2		1	2
	1	2	$\star$	1	2		1
2		1	2		1	2	
1	2		1	2		1	2
	1	2		1	2		1



左の図のように、1, 2 または × を書くと、いずれの場合もなにも書かなかったマスが 20 個である。2 種類の板で敷き詰めることができたと仮定する。すると $\star$ のないマスは 63 個で、一枚の板は、丁度 3 マスおおう事になる。従って板は 21 枚必要である。このとき、数字や × の書き方から、どの板も、なにも書かれていないマスを丁度一個ずつおおう。(理由：何も書いてないマスは、左上から右下に斜めに並んでいるので、これらを、板で二つ覆う事はない。上または下の続いて 2 マスで何も書いていないところを覆うとすると、もうひとマスは必ず何も書いていないマスになる。）したがって、21 枚ではなにも書かなかったマスを 21 おおう事になるが、最初に書いたように、この盤には、なにも書かなかったマスは、20 個であり、矛盾である。従って、これらの板で、$\star$ 以外の全体を重なることなく敷き詰めることはできない。

Write 1, 2 or × as in the boards above. Observe that there are 20 squares with no marks in either case.

Suppose this board can be covered up by these plates of two types without overlapping. Since there are 63 squares, we need 21 plates. In order to cover up without overlapping, each plate has to be placed to covere up exactly three squares. Moreover, each plate covers up exactly one square with no marks. So with 21 plates 21 squares with no marks are to be covered, contradicting our first observation that there are only 20 squares with no marks. Therefore it is impossible to cover up the board without overlapping.