Quiz 1

ID#: **Name:**

p, q, r を命題、x を p, q, r の結合命題とする。Let p, q and r be statements and x a compound statement of p, q and r.

1. 下の真理表を完成せよ。Complete the truth table below.

p	q	r	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow \neg r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$	x
T	T	T			T
T	T	F			F
T	F	T			F
T	F	F			F
F	T	T			T
F	T	F			F
F	F	T			F
F	F	F			T

2. $y \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow \neg r)$, $z \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$. 正しいものを選べ。Choose the correct one.

   (a) $y \equiv z$ (b) $y \equiv \neg z$ (c) どちらでもない。Neither of (a) nor (b).

3. $y \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow \neg r)$ を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。Express y using $\neg$, $\vee$ and perentheses only.

4. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x in the truth table above. There may be voids.)

$$
\begin{aligned}
x \equiv\ & ((((\neg\, p) \_\_\ q) \_\_\ r) \vee \\
& (((\_\_\ p) \_\_\ (\neg\, q)) \wedge (\_\_\ r))) \_\_ \\
& (((\_\_\ p) \wedge (\_\_\ q)) \_\_\ (\_\_\ r)).
\end{aligned}
$$

Message 欄：将来の夢、25 年後の自分について、世界について。What is your dream? Describe your vision of yourself and the world 25 years from now.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 1

p, q, r を命題、x を p, q, r の結合命題とする。Let p, q and r be statements and x a compound statement of p, q and r.

1. 下の真理表を完成せよ。Complete the truth table below.

p	q	r	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$\neg r)$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\neg r)$	x
T	T	T				$\boldsymbol{F}$		F					$\boldsymbol{T}$								T
T	T	F		F		$\boldsymbol{F}$							$\boldsymbol{T}$								F
T	F	T				$\boldsymbol{T}$							$\boldsymbol{F}$						F		F
T	F	F		F		$\boldsymbol{F}$							$\boldsymbol{T}$								F
F	T	T				$\boldsymbol{F}$		F					$\boldsymbol{T}$								T
F	T	F				$\boldsymbol{T}$							$\boldsymbol{F}$		F						F
F	F	T				$\boldsymbol{T}$					F		$\boldsymbol{F}$						F		F
F	F	F				$\boldsymbol{T}$					F		$\boldsymbol{F}$		F						T

2. $y \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow \neg r)$, $z \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$. 正しいものを選べ。Choose the correct one.

   (a) $y \equiv z$ $\quad$ $\boxed{\text{(b) } y \equiv \neg z}$ $\quad$ (c) どちらでもない。Neither of (a) nor (b).

3. $y \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow \neg r)$ を $\neg$ と $\vee$ と 括弧だけを用いて表せ。Express y using $\neg$, $\vee$ and perentheses only.

   Soln. Apply $u \Rightarrow v \equiv \neg u \vee v$ and $u \wedge v \equiv \neg(\neg u \vee \neg v)$.

$$y \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \equiv \neg(\neg(\neg p \vee r) \vee \neg(\neg q \vee \neg r)),$$

   or

$$y \equiv \neg z \equiv \neg((p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) \equiv \neg(p \vee q) \vee \neg(p \vee r) \vee \neg(q \vee \neg r).$$

4. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の 下線の部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。空欄となる箇所があるかも知れない。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x in the truth table above. There may be voids.)

   Soln.

   Since

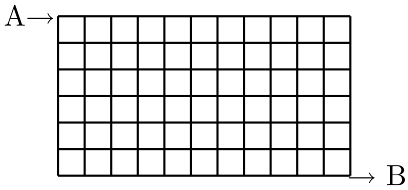
$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r),$$

$$\begin{aligned} x \ \equiv \ & ((((\neg\, p) \,\underline{\wedge}\, q) \,\underline{\wedge}\, r) \ \vee \\ & (((\underline{\neg}\, p) \,\underline{\wedge}\, (\neg\, q)) \ \wedge \ (\underline{\neg}\, r))) \,\underline{\vee} \\ & (((\underline{\quad}\, p) \ \wedge \ (\underline{\quad}\, q)) \,\underline{\wedge}\, (\underline{\quad}\, r)). \end{aligned}$$

Quiz 2

ID#: **Name:**

1. 線の上を右か下に進み A から B へ行く行き方の数 x と、r 個のみかんを s 人のこどもで分ける分け方の数は同じである（一人が一つももらえなくても良いとする。）The number x is the ways to move from A to B by going to the right or down. This number is same as the number of ways r Japanese oranges are distributed among s children (some may get none). (10pts)



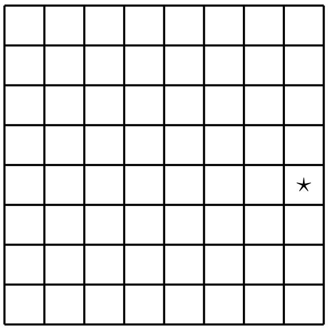
(a) r と s は何か。What are r and s?

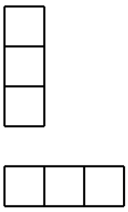
$r =$ $s =$

(b) この数 x はいくつか。${}_nC_m$ の形で表せ。What is the number x? Express the number in the form ${}_nC_m$

$x =$

2. 下のようなチェス盤から、$\star$ のところを取り除いたものは、1×3 の板では敷き詰められないことを説明せよ。Explain the fact that it is impossible to cover up the board without overlapping using 1×3 plates below.

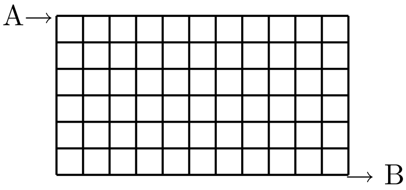




Message 欄（裏にもどうぞ）： あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。What is most precious to you?（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 2

1. 線の上を右か下に進み A から B へ行く行き方の数 x と、r 個のみかんを s 人のこどもで分ける分け方の数は同じである（一人が一つももらえなくても良いとする。）The number x is the ways to move from A to B by going to the right or down. This number is same as the number of ways r Japanese oranges are distributed among s children (some may get none). (10pts)



(a) r と s は何か。What are r and s?

$r = \boxed{11}$ $s = \boxed{7}$

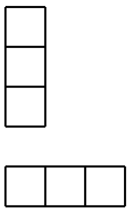
$r = 6, s = 12$ も正解です。

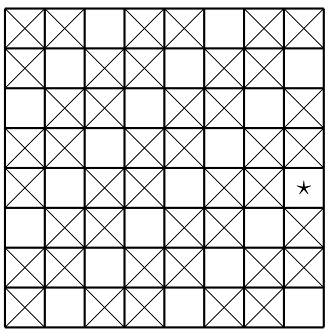
(b) この数 x はいくつか。${}_nC_m$ の形で表せ。What is the number x? Express the number in the form ${}_nC_m$

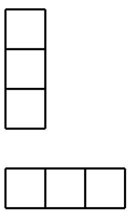
$x = \boxed{{}_{17}C_6}$

2. 下のようなチェス盤から、$\star$ のところを取り除いたものは、1×3 の板では敷き詰められないことを説明せよ。Explain the fact that it is impossible to cover up the board without overlapping using 1×3 plates below.

1	2		1	2		1	2
2		1	2		1	2	
	1	2		1	2		1
1	2		1	2		1	2
2		1	2		1	2	$\star$
	1	2		1	2		1
1	2		1	2		1	2
2		1	2		1	2	







左の図のように、1, 2 または $\times$ を書くと、いずれの場合もなにも書かなかったマスが 20 個である。1×3 の板で敷き詰めることができたと仮定する。すると $\star$ のないマスは 63 個であるから、1×3 の板は 21 枚必要である。またこれらの板は、縦か横に 3 マスおおう事になる。このとき、数字や $\times$ の書き方から、どの板も、なにも書かれていないマスを丁度一個ずつおおう。したがって、21 枚ではなにも書かなかったマスを 21 おおう事になるが、最初に書いたように、この盤には、なにも書かなかったマスは、20 個であり、矛盾である。従って、1×3 の板で、$\star$ 以外の全体を重なることなく敷き詰めることはできない。

Write 1, 2 or $\times$ as in the boards above. Observe that there are 20 squares with no marks in either case.

Suppose this board can be covered up by 1×3 plates without overlapping. Since there are 63 squares, we need 21 plates. In order to cover up without overlapping, each plate has to be placed either horizontally or vertically covering up three squares. Moreover, each plate covers up exactly one square with no marks. So with 21 plates 21 squares with no marks are to be covered, contradicting our first observation that there are only 20 squares with no marks. Therefore it is impossible to cover up the board without overlapping.

Quiz 3

ID#: **Name:**

Figure 1 ようなハノイの塔のゲームで、円盤を積む場所が 3 箇所 (A, B, C) あり、その一つ A に大きさの異なる 6 枚の円盤が下から大きい順に積まれている。円盤の移動は 1 回につき 1 枚、円盤の上にはより小さな円盤しか載せないとする。(Consider the Hanoi's Tower with 6 disks as in Figure 1.)

1. 5 枚の円盤のハノイの塔ならどの場所からどの場所へも 31 回で移動できると言っている人がいる。この人に 6 枚すべての円盤を 63 回の移動で C に移すことができる事を説明してください。(Explain that all 6 disks can be moved to C with 63 moves to a person who can move 5 disks from one place to the other without difficulty in 31 moves.)

2. Figures 2, 3 は A にあった 6 枚の円盤を B または C に最少手数で移動させている途中である。それぞれ、どこに移動する途中かと、次の移動と、最少手数ではあと何回の移動が必要かを答えよ。(We are in the process of moving 6 disks from A to B or C with minimal number of steps. Answer the following in each case.) 適切なものに丸をし、下線に数を書き入れよ。(Encircle the appropriate choices and fill the number in blank.)

   (a) Figure 2. A:6, B:5,4,3, C:2,1

   移動先 (Move to)： B　C　次の移動 (Next move)：1 → A, 1 → B, or 3 → A.

   移動回数 (How many moves left?)：________ 回

   (b) Figure 3. A:6,1, B:4,3, C:5,2

   移動先 (Move to)： B　C　次の移動 (Next move)：1 → B, 1 → C, or 2 → B.

   移動回数 (How many moves left?)：________ 回

Figure 1

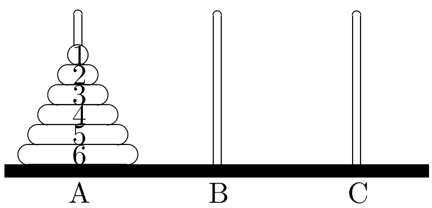


Figure 2

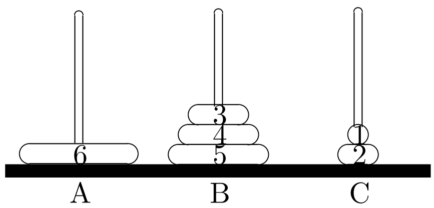
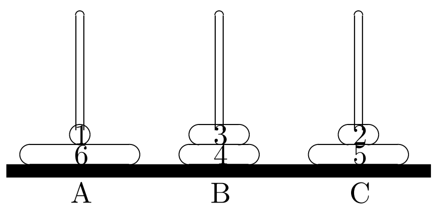


Figure 3



Message 欄 (裏にもどうぞ)：最近のことで、とても嬉しかった（感謝している）こと、悲しかったこと、怒っていること。(Anything that made you rejoice, sad or angry, or you are thankful of recently?)（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 3

Figure 1 ようなハノイの塔のゲームで、円盤を積む場所が 3 箇所 (A, B, C) あり、その一つ A に大きさの異なる 6 枚の円盤が下から大きい順に積まれている。円盤の移動は 1 回につき 1 枚、円盤の上にはより小さな円盤しか載せないとする。(Consider the Hanoi's Tower with 6 disks as in Figure 1.)

1. 5 枚の円盤のハノイの塔ならどの場所からどの場所へも 31 回で移動できると言っている人がいる。この人に 6 枚すべての円盤を 63 回の移動で C に移すことができる事を説明してください。(Explain that all 6 disks can be moved to C with 63 moves to a person who can move 5 disks from one place to the other without difficulty in 31 moves.)

   Soln. 最初に上に載っている 5 枚を、B に動かしてみましょう。5 枚だから 31 回の移動で移動できますね。A の場所も使いますが、一番下にあるのは一番大きいので、なにを載せても大丈夫ですから、5 枚の時と同じですね。5 枚すべてが B に移りましたから、A には一番大きい円盤だけで、C にはなにもありません。(Figure 4) ですから一番大きい円盤を C に移します。(Figure 5) 次に、B にある 5 枚を C にある一番大きな円盤の上に移してみましょう。5 枚だから 31 回の移動でできますね。途中で C の場所も使いますが、ここにあるのは一番大きいので、なにを載せても大丈夫ですから、5 枚のときと同じですね。これで完成です。(Figure 6) 合計では、$31 + 1 + 31 = 63$ で 63 回の移動で A にある 6 枚を C に移すことができました。

   Figure 4

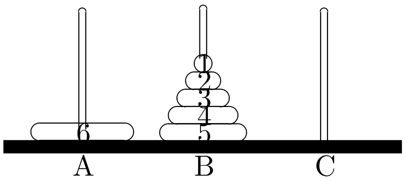
   

   Figure 5

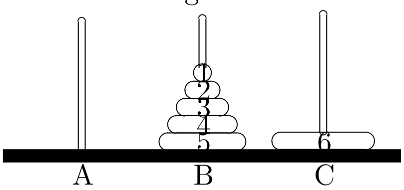
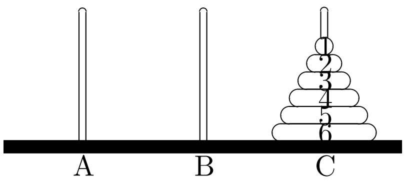
   

   Figure 6

   Move 5 small disks on A to B. (Figure 1) This is possible by 31 moves. Then move the largest from A to C by one move. Finally move 5 disks on B to C by 31 moves. (Figure 6) This is possible as these five disks are smaller than the one on C. Altogether it requires $31 + 1 + 31 = 63$ moves.

2. Figures 2, 3 は A にあった 6 枚の円盤を B または C に最少手数で移動させている途中である。それぞれ、どこに移動する途中かと、次の移動と、最少手数ではあと何回の移動が必要かを答えよ。(We are in the process of moving 6 disks from A to B or C with minimal number of steps. Answer the following in each case.) 適切なものに丸をし、下線に数を書き入れよ。(Encircle the appropriate choices and fill the number in blank.)

   (a) Figure 2. A:6, B:5,4,3, C:2,1

   移動先 (Move to)： B $\boxed{\text{C}}$ 次の移動 (Next move)：$\boxed{1 \to \text{A}}$, $1 \to$ B, or $3 \to$ A.

   移動回数 (How many moves left?)：$\underline{35}$ 回

   (b) Figure 3. A:6,1, B:4,3, C:5,2

   移動先 (Move to)： $\boxed{\text{B}}$ C 次の移動 (Next move)：$1 \to$ B, $\boxed{1 \to \text{C}}$, or $2 \to$ B.

   移動回数 (How many moves left?)：$\underline{45}$ 回

Figure 1

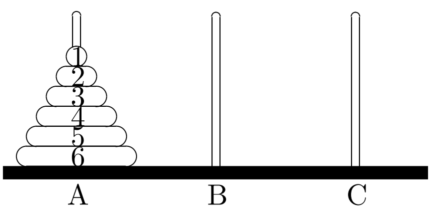


Figure 2

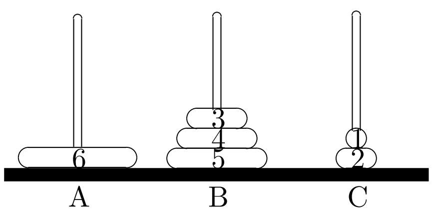
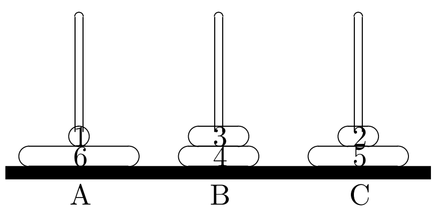


Figure 3



Quiz 4

ID#: **Name:**

1. 一辺が 100 メートルの正三角形をした土地に、26 個の鳥の巣がある。ある 2 個の鳥の巣の距離は 20 メートル以内であることを鳩ノ巣原理を用いて説明してください。There are 26 nests of birds in a region which is in the shape of an equilateral triangle with sides 100 meters in length. Explain that there are two nests that are only 20 meters apart or less using the pigeonhole principle.

2. 「数学の世界」の授業は 27 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、40 問は越さない（at most 40 problems）ものとする。このときちょうど 13 問考える期間（たとえば 3 時間目から 10 時間目の問題合計が 13 問など）があることを説明せよ。There are 27 "World of Mathematics" class sessions, at least one problem is discussed per session, and the total number of problems does not exceed 40. Explain that there is a period (a period of classes, e.g. from the 3rd class to the 10th class) during which exactly 13 problems are discussed.

Message 欄（裏にもどうぞ）：どんなおとなが魅力的ですか。こどもの魅力は何でしょう。What kind of adult is admirable? What is admirable about children?（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 4

1. 一辺が 100 メートルの正三角形をした土地に、26 個の鳥の巣がある。ある 2 個の鳥の巣の距離は 20 メートル以内であることを鳩ノ巣原理を用いて説明してください。There are 26 nests of birds in a region which is in the shape of an equilateral triangle with sides 100 meters in length. Explain that there are two nests that are only 20 meters apart or less using the pigeonhole principle.

   Soln. この三角形の土地は、一辺が 20 メートルの正三角形 25 個に分けることができる。巣は 26 あるので、鳩の巣原理により、どの一つかの正三角形には、境界も含めて 2 個以上の巣がある。この正三角形は一辺が 20 メートルなので、一番遠くても、20 メートルである。すなわち「ある 2 個の鳥の巣の距離は 20 メートル以内である。」 ■

   It is possible to subdivide this region into 25 regions which is in the shape of an equilateral triangle with sides 20 meters in length. Since there are 26 nests, by the pigeonhole principle, one of the regions has more than one nest. Since each of these regions is in the shape of an equilateral triangle with sides 20 meters in length, there are two nests that are only 20 meters apart or less. ■

2. 「数学の世界」の授業は 27 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、40 問は越さない（at most 40 problems）ものとする。このときちょうど 13 問考える期間（たとえば 3 時間目から 10 時間目の問題合計が 13 問など）があることを説明せよ。There are 27 “World of Mathematics” class sessions, at least one problem is discussed per session, and the total number of problems does not exceed 40. Explain that there is a period (a period of classes, e.g. from the 3rd class to the 10th class) during which exactly 13 problems are discussed.

   Soln. a_1 を一回目で考えた問題の数、a_2 で二回目の授業で考えた問題の数などとする。i 回目の授業で考えた問題の数は a_i と表される。また $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$. $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$ などとする。これは、1 回目までに考えた問題の数、2 回目までに考えた問題の数、3 回目までに考えた問題の数などとなる。すると、毎回 1 問は問題を考えるので、$a_i \geq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 27)$, で、合計で 40 問を越さないので、

   $$1 \leqq b_1 < b_2 < \cdots < b_{27} \leqq 40, \quad b_1 + 13 < b_2 + 13 < \cdots < b_{27} + 13 \leqq 53$$

   となっていることを、考えると、$b_1, b_2, \ldots, b_{27}, b_1 + 13, b_2 + 13, \ldots, b_{27} + 13$ はすべて 53 以下で、かつ、合計で 54 個の数であるので、鳩の巣原理により、このうちのどれか二つは等しい。$b_1, b_2, \ldots, b_{27}$ はすべて異なり、$b_1 + 13, b_2 + 13, \ldots, b_{27} + 13$ もすべて異なるので、等しくなるとすると、最初のグループのうちのどれかと、後のグループのうちのどれかである。これを最初のグループの i 番目と、後のグループの j 番目とすると $b_i = b_j + 13$ である。これは、

   $$13 = b_i - b_j = (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_j) = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j.$$

   したがって、$i + 1$ 回目の授業から j 回目の授業で丁度、13 問考えた事が分かった。 ■

   Let a_1 be the number of problems discussed in the first class, a_2 in the second, etc. So a_i is the number of problems discussed during the ith class. Let $b_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. Then b_i is the total number of problems discussed from the first to the ith class. Then

   $$1 \leqq b_1 < b_2 < \cdots < b_{27} \leqq 40, \quad b_1 + 13 < b_2 + 13 < \cdots < b_{27} + 13 \leqq 53.$$

   There are 54 numbers in the range 1 to 53. Hence by the pigeonhole principle, two numbers must coincide. Since the numbers in the first group are distinct, and so are the second group, the only possibility is that one in the first group and the one in the second coincides. Suppose $b_i = b_j + 13$. Now,

   $$13 = b_i - b_j = (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_j) = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j,$$

   and there is a period (a period of classes, e.g. from the 3rd class to the 10th class) during which exactly 13 problems are discussed. ■

Quiz 5

ID#: **Name:**

1. C さんは参加者が全員で 10 人のパーティーに参加した。握手が交わされた後で C さんが参加者全員に握手した人数を聞くと、みな最低一人とは握手し、握手した人数はみな違うとのことだった。このとき、以下のことを説明してください。Ms C participated in a party with 10 people in all. Some of the people in the party shook hands with some of the others, and everybody shook hands at least once. After that Ms. C asked everyone with how many people they shook hands. She received different answers from everybody. Explain the following.

   (a) 丁度一人と握手した人が必ず一人いる。At least one of them shook hands with exactly one person.

   (b) 丁度一人と握手した人が握手したのは、最も多くの人と握手した人である。Those who shook hands with exactly one person shook hands with the person who shook hannds with the most.

   (c) C さんは、奇数人のひとと握手した。Ms C shook hands with odd number of people.

2. 119 人受講生がいるクラスのレポート課題で何人かは提出しなかったが、全員がそれぞれ 16 人分のレポートを読み、各レポートは 17 人の人が読んだことが分かった。さて、提出しなかった人は何人か。Some students of a class with 119 students did not turn in a paper assignment. All students read 16 papers of their classmates and every paper was read by 17 students. How many students did not turn in the assignment? *Show work!!*

Message 欄（裏にもどうぞ）： (1) 結婚について、家庭について、子供について。About marriage, family and children. (2) この授業について。要望・改善点など。About this course; requests and suggestions for improvement.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 5

1. C さんは参加者が全員で 10 人のパーティーに参加した。握手が交わされた後で C さんが参加者全員に握手した人数を聞くと、みな最低一人とは握手し、握手した人数はみな違うとのことだった。このとき、以下のことを説明してください。Ms C participated in a party with 10 people in all. Some of the people in the party shook hands with some of the others, and everybody shook hands at least once. After that Ms. C asked everyone with how many people they shook hands. She received different answers from everybody. Explain the following.

   (a) 丁度一人と握手した人が必ず一人いる。At least one of them shook hands with exactly one person.

   Soln. 握手の可能性は、0 人から 9 人だが、最低一人とは握手しているので、可能性は、1 人から 9 人の 9 通り。C さんが聞いたのが 9 人だから、これらの人数と握手した人が一人ずついることになる。従って、丁度 1 人と握手した人も必ず一人いる。 ■

   Since everyone shook hands with at least once, the possibilities of numbers of people each participant shook hands with are 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Since all nine people Ms C asked answered different numbers, they must be 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 each. Therefore one of them shook hands with exactly one person. ■

   (b) 丁度一人と握手した人が握手したのは、最も多くの人と握手した人である。Those who shook hands with exactly one person shook hands with the person who shook hannds with the most.

   Soln. 上の考察から 9 人のひとと握手した人がいる。全員で 10 人だからこの人は自分以外全員と握手したことになる。したがって、この人が最も多くの人と握手した人で、かつ、1 人としか握手しなかったひととも握手している。1 人としか握手しなかったと言うことは、この最も多くの人と握手した人とだけ握手したことになる。 ■

   Since there is also a person who shook hands with 9 people, i.e. with all participants, those who shook hands with exactly one person must shook hands with this person who shook hannds with the most. ■

   (c) C さんは、奇数人のひとと握手した。Ms C shook hands with odd number of people.

   Soln. C さん以外の人が握手した人数は、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 人である。それぞれの人が握手した人数の総数は、握手したペアの二倍だから、C さんが握手した人数を x 人とすると、$1+2+3+4+5+6+7+8+9+x = 45+x$ は偶数でなければならない。したがって、x は奇数。[別解] 握手の定理によって、握手をした人数が奇数人のひとのかずは偶数人。S さん以外で奇数人の人と握手したひとは、1, 3, 5, 7, 9 人の人と握手した 5 人だから、S さんも 奇数人と握手したことになる。 ■

   Let x be the number of people Ms C shook hands with. Since the rest of the people shook hand with 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 people, by the shakehands theorem, $1+2+3+4+5+6+7+8+9+x = 45+x$ has to be even. Thus x is odd. ■

2. 119 人受講生がいるクラスのレポート課題で何人かは提出しなかったが、全員がそれぞれ 16 人分のレポートを読み、各レポートは 17 人の人が読んだことが分かった。さて、提出しなかった人は何人か。Some students of a class with 119 students did not turn in a paper assignment. All students read 16 papers of their classmates and every paper was read by 17 students. How many students did not turn in the assignment? *Show work!!*

   Soln. レポートを提出したひとの数を x 人とする。これは、レポートの数と同じ。したがって、読んだ人とその読んだレポートの組の数は、119 人の受講生が、x 個のレポートを読んだ（握手した）と考えると、レポートが読まれた（握手した）数とも等しいから、$119 \times 16 = 17 \times x$, したがって $x = 7 \times 16 = 112$. これより提出しなかった人の数は、7 人となる。 ■

   Let x be the number of students turned in their paper, which is equal the number of papers. Since 119 students read 16 papers and each paper was read by 17 students, $119 \times 16 = 17 \times x$. Thus $x = 112$. Therefore $7 = 119 - 112$ students did not turn in the assignment. ■

Quiz 6

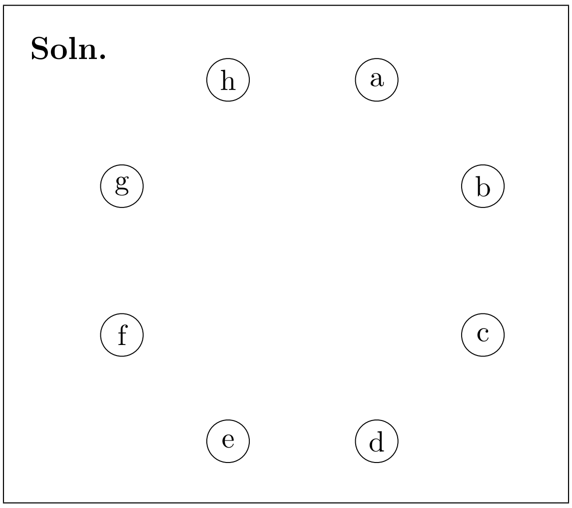
ID#: **Name:**

1. 頂点数が 8 で、次数が 1 の頂点の数が丁度 5 である木について次の問に答えよ。Consider trees with eight vertices having exactly five vertices of degree 1.

   (a) 残りの 3 頂点の次数は何か（2 種類以上あります）。What are the degrees of the remaining three vertices. (There are more than one possibilities.)

   (b) 条件を満たす（同型でない）木が 6 種類ある。これらを図示せよ。Depict six non-isomorphic trees satisfying the condition.

2. a, b, c, d, e, f, g, h の 8 地点を結ぶ（間接でも良い）ネットワークでコスト最小のものを作りたい。2 地点間を結ぶコストは下の表のように与えられているとき、そのネットワークを下の図に示し、コスト合計を書け。Find a most inexpensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h and its total cost by referring to the cost table below.



Cost Table

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	-	1	3	1	8	5	5	4
b	1	-	2	2	5	6	5	7
c	3	2	-	2	6	7	5	5
d	1	2	2	-	5	6	5	5
e	8	5	6	5	-	2	3	2
f	5	6	7	6	2	-	3	4
g	5	5	5	5	3	3	-	2
h	4	7	5	5	2	4	2	-

Total Cost: units

Message 欄（裏にもどうぞ）：国際人とは。ICU のそして自分の「国際性」にとって必要なこと。How do you define World Citizen? Your thought on Internationalism at ICU.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

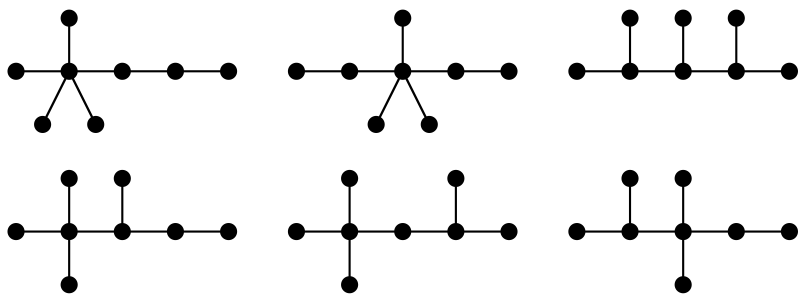
Solutions to Quiz 6

1. 頂点数が 8 で、次数が 1 の頂点の数が丁度 5 である木について次の問に答えよ。Consider trees with eight vertices having exactly five vertices of degree 1.

   (a) 残りの 3 頂点の次数は何か（2 種類以上あります）。What are the degrees of the remaining three vertices. (There are more than one possibilities.)
   Soln. 残りの次数を x, y, z とする。次数は 1 よい大きいので、これらはすべて 2 以上。木なので、辺の数は、頂点の数引く 1 つまり、7 なので、Theorem 5.1 より、次数の総和は 14 である。したがって、$5+x+y+z=14$. 即ち、$x+y+z=9$。従って、可能性は、以下の三通りである。Let x, y, z be the degrees of the remaining vertices. By assumption, these are at least two. Since the number of edges e in a tree is one less than the number of vertices, $e=7$. By Theorem 5.1, the total degrees of vertices is $14=2e=5+x+y+z$. Thus $x+y+z=9$ and we have the following possibilities.

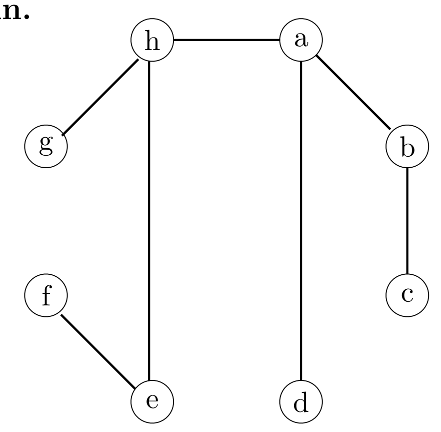
   $$(x, y, z) = (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3). \quad (x \leqq y \leqq z)$$

   (b) 条件を満たす（同型でない）木が 6 種類ある。これらを図示せよ。Depict six non-isomorphic trees satisfying the condition.
   Soln.



2. a, b, c, d, e, f, g, h の 8 地点を結ぶ（間接でも良い）ネットワークでコスト最小のものを作りたい。2 地点間を結ぶコストは下の表のように与えられているとき、そのネットワークを下の図に示し、コスト合計を書け。Find a most inexpensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h and its total cost by referring to the cost table below.

Soln.



Cost Table

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	-	1	3	1	8	5	5	4
b	1	-	2	2	5	6	5	7
c	3	2	-	2	6	7	5	5
d	1	2	2	-	5	6	5	5
e	8	5	6	5	-	2	3	2
f	5	6	7	6	2	-	3	4
g	5	5	5	5	3	3	-	2
h	4	7	5	5	2	4	2	-

Total Cost: 14 units

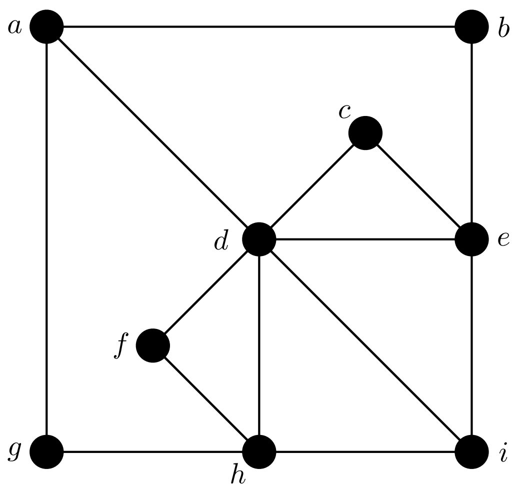
Connected であって、Total Cost が 14 であれば、上の Tree と同じでなくても正解です。ただし、その場合、必ず Tree となっています。どうしてだか分かりますか。

Quiz 7

ID#: **Name:**

1. 下のグラフはオイラーグラフではないことを定理を使わずに説明して下さい。Explain that the graph below is not Eulerian without using a theorem.

2. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。Show that the graph below is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.



Message 欄（裏にもどうぞ）: 聖書を読んだことがありますか。キリスト教について、ICU の「C」について。Have you read the Bible? Any comments on Christianity and “C” of ICU.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don’t want your message to be posted, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 7

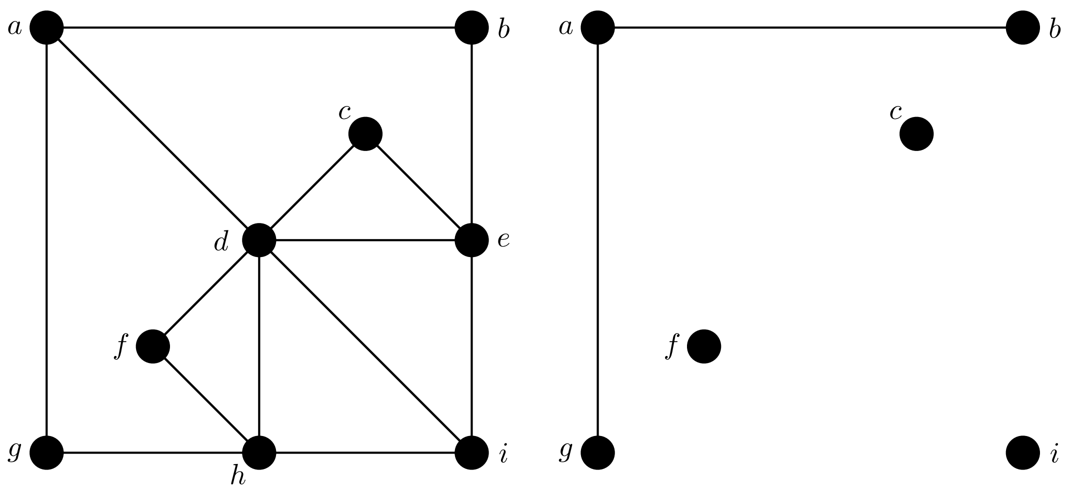
1. 下のグラフはオイラーグラフではないことを定理を使わずに説明して下さい。Explain that the graph below is not Eulerian without using a theorem.

   Soln. オイラーグラフは、各辺を丁度一回ずつ通る閉路を持つグラフである。このグラフに全ての辺を丁度一回ずつ通る閉路があったとする。閉路は各頂点を通る毎に、二つずつ辺を必要とするが、各辺を丁度一回ずつ通るので、同じ辺を使うことができず、各頂点の次数は偶数でなければならない。下のグラフの a の次数は 3 で奇数だから、このグラフは、オイラーグラフではない。

   註：閉路は定義から、$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ で、$v_0 = v_\ell$ かつ、$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{\ell-1}, v_\ell\}$ は辺で、$v_0 \neq v_2, v_2 \neq v_4, \ldots, v_{\ell-2} \neq v_0, v_{\ell-1} \neq v_1$ となっているものである。これがすべての辺を通ると言うことは、この辺のなかに、$\{a, b\}, \{a, d\}.\{a, g\}$ も丁度一回ずつ、かつペアで現れることになる。これは矛盾である。 ■

   A Eulerian graph is a graph having a closed path which visits every edge exactly once. Every closed path uses two edges when it passes each vertex. If a closed path visits every edge exactly once, the degree of each vertex has to be even. However, the degree of vertex a is three, this is not the case. Thus this graph is not Eulerian.

2. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$. ■



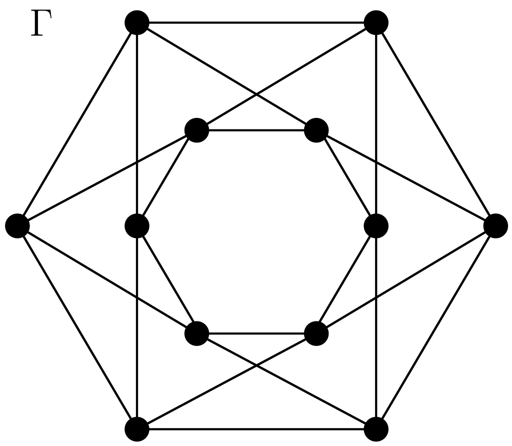
   $S = \{d, e, h\}$ とする。これらの頂点とその頂点を含む辺を取り除いたグラフを Δ とすると、それは、右上のグラフになる。この連結成分の数は、4 だから $\omega(\Delta) = 4$. ハミルトングラフなら、$4 = \omega(\Delta) \leq |S| = 3$ とならなければならないが、これは、矛盾である。 ■

   Set $S = \{d, e, h\}$. Let Δ be the graph obtained by deleting S, which is depicted on the right of the original graph. Then the number of connected components of Δ is four. By Theorem 7.3 if the graph is Hamiltonian, $4 = \omega(\Delta) \leq |S| = 3$. This is a contradiction. Thus, the graph is not Hamiltonian. ■

Quiz 8

ID#: **Name:**

1. 下のグラフ Γ について、(a) 二部グラフであることを示せ。Γ is bipartite. (b) 平面グラフに描くことができたとすると面の数はいくつか。If there is a plane graph isomorphic to Γ, how many faces does it have? (c) 平面的グラフではないことを示せ。Show that Γ is non-planar.



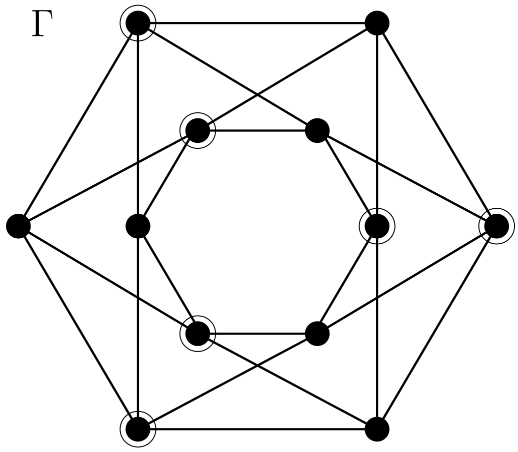
2. ある連結な平面グラフは、3-正則で、各面はすべて 3 辺形か 6 辺形である。このグラフの 3 辺形の総数を求めよ。A connected plane graph is 3-regular and every face is either a 3-gon or a 6-gon. Find the number of 3-gons.

Message 欄（裏にもどうぞ）：(1) 日本・世界の教育について。About education in Japan and in the world. (2) ICU の教育について。特に改善点について。About education of ICU, and its improvements.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you don't want your message to be posted, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 8

1. 下のグラフ Γ について、(a) 二部グラフであることを示せ。Γ is bipartite. (b) 平面グラフに描くことができたとすると面の数はいくつか。If there is a plane graph isomorphic to Γ, how many faces does it have? (c) 平面的グラフではないことを示せ。Show that Γ is non-planar.

Γ



(a) 丸をつけた頂点からなる集合を X、付けなかった頂点からなる集合を Y とすると、X の頂点同志、Y の頂点同志は、隣接していないから、このグラフは、二部グラフである。(Let X be the set of six encircled vertices and Y the rest. Then every edge consists of one vertex of X and one vertex of Y, Γ is bipartite.)
(b) 頂点の数 $v = 12$、辺の数 $e = 24$ だから、オイラーの公式により、面の数は、(Since $v = 12$ and $e = 24$ by Euler's formula, we have)

$$f = 2 - v + e = 2 - 12 + 24 = 14$$

である。
(c) 平面グラフに描けたとすると、(b) より面の数は、14 である。(a) より二部グラフだから、各面は、4 本以上の辺で構成される。したがって、Proposition 8.2 (ii) より (Suppose there is a plane graph isomorphic to Γ, the number of faces has to be 1 by (b). Since it is a bipartite graph by (a), every closed circuit is of even length. Thus every face is surrounded by at least 4 edges. Thus by Proposition 8.2 (ii),)

$$48 = 2e \geqq 4f = 4 \times 14 = 56$$

これは、矛盾である。したがって、平面的グラフではない。(This is a contradiction. Hence Γ is not a planar graph.)

2. ある連結な平面グラフは、3-正則で、各面はすべて 3 辺形か 6 辺形である。このグラフの 3 辺形の総数を求めよ。A connected plane graph is 3-regular and every face is either a 3-gon or a 6-gon. Find the number of 3-gons.

   Soln. 頂点の数を v、辺の数を e、面の数を f、3 辺形の数を t とする。このとき、Proposition 8.2 により (Let v be the number of vertices, e the number of edges, f the number of faces and t the number of 3-gons. Then by Proposition 8.2,)

$$3v = 2e = 3t + 6(f - t) = 6f - 3t.$$

これより、$f = (2e + 3t)/6$。オイラーの公式を用いると (By applying the Euler's formular, we have)

$$2 = v - e + f = \frac{2}{3}e - e + \frac{2e + 3t}{6} = \frac{t}{2}.$$

したがって、$t = 4$ で、三辺形の数は 4 である。Therefore the number t of 3-gons is four.