Solutions to Quiz 7

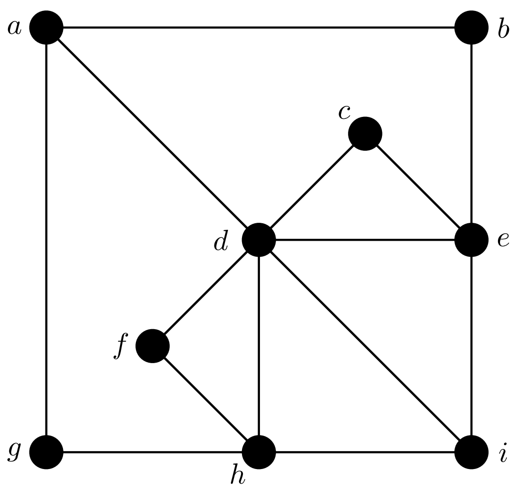
1. 下のグラフはオイラーグラフではないことを定理を使わずに説明して下さい。Explain that the graph below is not Eulerian without using a theorem.

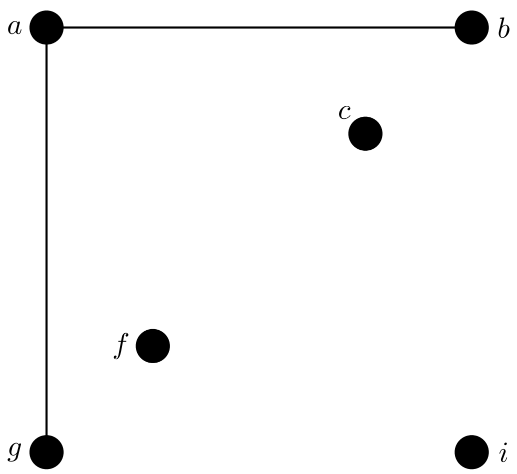
   Soln. オイラーグラフは、各辺を丁度一回ずつ通る閉路を持つグラフである。このグラフに全ての辺を丁度一回ずつ通る閉路があったとする。閉路は各頂点を通る毎に、二つずつ辺を必要とするが、各辺を丁度一回ずつ通るので、同じ辺を使うことができず、各頂点の次数は偶数でなければならない。下のグラフの a の次数は 3 で奇数だから、このグラフは、オイラーグラフではない。

   註：閉路は定義から、$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ で、$v_0 = v_\ell$ かつ、$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{\ell-1}, v_\ell\}$ は辺で、$v_0 \neq v_2, v_2 \neq v_4, \ldots, v_{\ell-2} \neq v_0, v_{\ell-1} \neq v_1$ となっているものである。これがすべての辺を通ると言うことは、この辺のなかに、$\{a, b\}, \{a, d\}.\{a, g\}$ も丁度一回ずつ、かつペアで現れることになる。これは矛盾である。 ■

   A Eulerian graph is a graph having a closed path which visits every edge exactly once. Every closed path uses two edges when it passes each vertex. If a closed path visits every edge exactly once, the degree of each vertex has to be even. However, the degree of vertex a is three, this is not the case. Thus this graph is not Eulerian.

2. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$. ■





   $S = \{d, e, h\}$ とする。これらの頂点とその頂点を含む辺を取り除いたグラフを Δ とすると、それは、右上のグラフになる。この連結成分の数は、4 だから $\omega(\Delta) = 4$. ハミルトングラフなら、$4 = \omega(\Delta) \leq |S| = 3$ とならなければならないが、これは、矛盾である。 ■

   Set $S = \{d, e, h\}$. Let Δ be the graph obtained by deleting S, which is depicted on the right of the original graph. Then the number of connected components of Δ is four. By Theorem 7.3 if the graph is Hamiltonian, $4 = \omega(\Delta) \leq |S| = 3$. This is a contradiction. Thus, the graph is not Hamiltonian. ■