

Solutions to Quiz 6

1. 頂点数が 8 で、次数が 1 の頂点の数が丁度 5 である木について次の間に答えよ。Consider trees with eight vertices having exactly five vertices of degree 1.

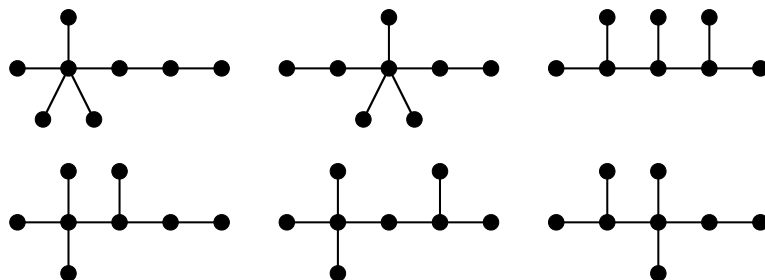
(a) 残りの 3 頂点の次数は何か (2 種類以上あります)。What are the degrees of the remaining three vertices. (There are more than one possibilities.)

Soln. 残りの次数を x, y, z とする。次数は 1 より大きいので、これらはすべて 2 以上。木なので、辺の数は、頂点の数引く 1 つまり、7 なので、Theorem 5.1 より、次数の総和は 14 である。したがって、 $5 + x + y + z = 14$ 。即ち、 $x + y + z = 9$ 。従って、可能性は、以下の三通りである。Let x, y, z be the degrees of the remaining vertices. By assumption, these are at least two. Since the number of edges e in a tree is one less than the number of vertices, $e = 7$. By Theorem 5.1, the total degrees of vertices is $14 = 2e = 5 + x + y + z$. Thus $x + y + z = 9$ and we have the following possibilities.

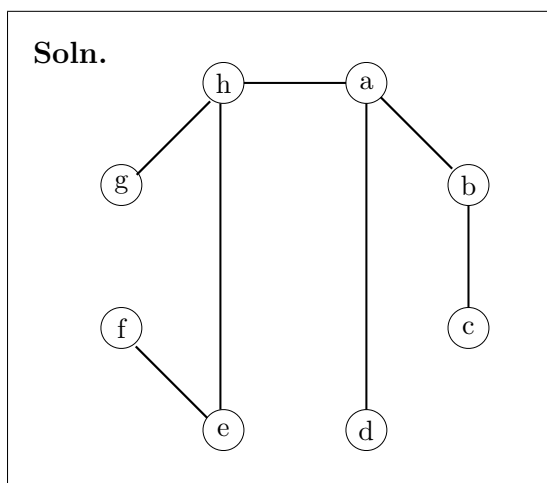
$$(x, y, z) = (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3). \quad (x \leq y \leq z)$$

(b) 条件を満たす (同型でない) 木が 6 種類ある。これらを図示せよ。Depict six non-isomorphic trees satisfying the condition.

Soln.



2. a, b, c, d, e, f, g, h の 8 地点を結ぶ (間接でも良い) ネットワークでコスト最小のものを作りたい。2 地点間を結ぶコストは下の表のように与えられているとき、そのネットワークを下図に示し、コスト合計を書け。Find a most inexpensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h and its total cost by referring to the cost table below.



Cost Table

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	-	1	3	1	8	5	5	4
b	1	-	2	2	5	6	5	7
c	3	2	-	2	6	7	5	5
d	1	2	2	-	5	6	5	5
e	8	5	6	5	-	2	3	2
f	5	6	7	6	2	-	3	4
g	5	5	5	5	3	3	-	2
h	4	7	5	5	2	4	2	-

Total Cost: 14 units

Connected であって、Total Cost が 14 であれば、上の Tree と同じでなくても正解です。ただし、その場合、必ず Tree となっています。どうしてですか分かりますか。