Quiz 1

ID#: **Name:**

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。(Let p, q and r be propositions. Determine whether the following equation holds or not by completing the truth table below.)

$$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg p \Rightarrow (\neg q \vee r).$$

p	q	r	$\neg \quad (p \quad \vee \quad q) \quad \Rightarrow \quad \neg \quad r$	$\neg \quad p \quad \Rightarrow \quad (\neg \quad q \quad \vee \quad r)$	x
T	T	T			T
T	T	F			T
T	F	T			T
T	F	F			T
F	T	T			T
F	T	F			F
F	F	T			F
F	F	F			T

[**判定 (Conclusion)**]

2. $\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r) \equiv \neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ である。同じように、$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r$ を $\neg$ と $\Rightarrow$ と 括弧だけを用いて下のように表したい。三つの下線空白の内、必要なところに $\neg$ を入れよ。(Fill some of the underlined blanks below by $\neg$ to express $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r$.)

$$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \equiv \_\_p \Rightarrow (\_\_q \Rightarrow \_\_r)$$

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の下線の必要な部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x in the truth table above. There may be voids.)

$$x \equiv (\_\_p \Rightarrow (\_\_q \Rightarrow \_\_r)) \quad \_\_ \quad (\_\_p \Rightarrow (\_\_q \Rightarrow \_\_r))$$

Message 欄：将来の夢、25 年後の自分について、世界について。What is your dream? Describe your vision of yourself and the world 25 years from now.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 1

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。(Let p, q and r be propositions. Determine whether the following equation holds or not by completing the truth table below.)

$$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg p \Rightarrow (\neg q \vee r).$$

p	q	r	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\Rightarrow$	$\neg$	r	$\neg$	p	$\Rightarrow$	$(\neg$	q	$\vee$	$r)$	x
T	T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	T	F
F	F	F	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	T	F	T

[**判定 (Conclusion)**]

F の位置が食い違っているので、論理同値ではない。$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \not\equiv \neg p \Rightarrow (\neg q \vee r)$. 等式は成り立たない。

2. $\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r) \equiv \neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ である。同じように、$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r$ を $\neg$ と $\Rightarrow$ と 括弧だけを用いて下のように表したい。三つの下線空白の内、必要なところに $\neg$ を入れよ。(Fill some of the underlined blanks below by $\neg$ to express $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r$.)

解：$\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ は (p, q, r) の真理値が (F, T, F) の時のみ F であとは、T である。$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r$ は、(p, q, r) の真理値が (F, F, T) の時のみ F であとは、T であるから

$$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r).$$

3. 上の真理表の一番右の列 x を表す論理式になるように、下の下線の必要な部分に、$\neg$, $\wedge$, または、$\vee$ を入れよ。(Fill each underlined blank with $\neg$, $\wedge$ or $\vee$ to express x in the truth table above. There may be voids.)

解：真理表から、$x = (\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r))$. 従って、上のことから、

$$\begin{aligned} x &\equiv (\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r)) \\ &\equiv (\neg p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r)) \wedge (\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow r)). \end{aligned}$$

実は、$p \vee q \vee r$ は (p, q, r) の真理値が (F, F, F) の時だけ、F でそれ以外は、T でした。$y \Rightarrow z \equiv \neg y \vee z$ を使うと、

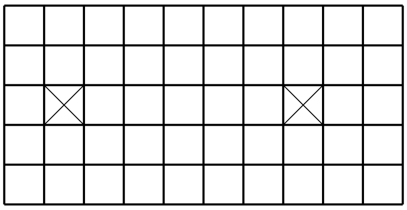
$$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg r \equiv p \vee q \vee \neg r, \ \neg p \Rightarrow (\neg q \vee r) \equiv p \vee \neg q \vee r.$$

こう考えると、前者は、(p, q, r) の真理値が (F, F, T) の時だけ、F、後者は、(p, q, r) の真理値が (F, T, F) の時だけ、F であとは、すべて T だということも簡単にわかります。

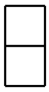
Quiz 2

ID#: **Name:**

1. $\times$ の所に柱が二本あり、実質 24 畳敷の広間がある。(A) のような一畳サイズの布団を重なり合うことなく敷き詰めることはできないことを丁寧に説明せよ。(Explain the impossibility of covering up the room below with 24 mat size usable space (a 25 mat size room with two large pillars at $\times$) by one mat size *futon* of shape (A) without overlapping.)



(A)



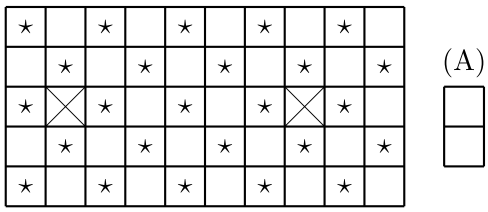
2. (a) 20 枚のチケットを A, B, C, D, E, F の 6 人で売る。それぞれが少なくとも一枚は売るとき何通りの可能性があるか。(How many ways are there to sell 20 tickets by 6 assuming that each one sells at least one?) [答えだけで良い。Solution only! ${}_nC_r$, ${}_nP_r$, および $n!$ の値は計算しなくてよい。(No need to evaluate ${}_nC_r$, ${}_nP_r$ or $n!$.)]

   (b) 14 枚のチケットを A, B, C, D, E, F の 6 人で売る。一枚も売らない人がいてもよいとすると、何通りの可能性があるかを考えるとそれは、上の場合の数と同じであることを丁寧に説明せよ。(The number of ways to sell 14 tickets by 6, allowing that some may sell no tickets, is equal to the number in the previous problem. Explain why.)

Message 欄（裏にもどうぞ）： あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。What is most precious to you?（「HP 掲載不可」は明記の事。If you wish, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 2

1. $\times$ の所に柱が二本あり、実質 24 畳敷の広間がある。(A) のような一畳サイズの布団を重なり合うことなく敷き詰めることはできないことを丁寧に説明せよ。(Explain the impossibility of covering up the room below with 24 mat size usable space (a 25 mat size room with two large pillars at $\times$) by one mat size *futon* of shape (A) without overlapping.)



解：上の図のように $\star$ を書いてみると、この部屋には、$\star$ が 25, $\star$ がついてない正方形が 23 あることが分かる。背理法を用いて示す。布団が重なり合わないように敷き詰めることができないことを示したいので、重なり合わないように布団を敷き詰めることができるとする。すると、24 畳なので、布団は、24 枚必要で、かつ、ひとつひとつの布団は、縦か横におくことになり、二つの正方形にまたがるが、それは、$\star$ の付け方から、$\star$ のついているところ一つと、$\star$ のついていないところ一つを蔽うことになる。24 枚で蔽うのは、$\star$ のついているところ 24 と、$\star$ のついていないところ 24 である。ところがこの部屋には、$\star$ のついているところが 25 あるので、すべてを蔽ってはいないことになり、矛盾である。したがって、重なり合わないように、布団を敷き詰めることができないことが分かった。

2. (a) 20 枚のチケットを A, B, C, D, E, F の 6 人で売る。それぞれが少なくとも一枚は売るとき何通りの可能性があるか。(How many ways are there to sell 20 tickets by 6 assuming that each one sells at least one?) [答えだけで良い。Solution only! ${}_nC_r$, ${}_nP_r$, および $n!$ の値は計算しなくてよい。(No need to evaluate ${}_nC_r$, ${}_nP_r$ or $n!$.)]

$$ {}_{19}C_5 = 11628. $$

(b) 14 枚のチケットを A, B, C, D, E, F の 6 人で売る。一枚も売らない人がいてもよいとすると、何通りの可能性があるかを考えるとそれは、上の場合の数と同じであることを丁寧に説明せよ。(The number of ways to sell 14 tickets by 6, allowing that some may sell no tickets, is equal to the number in the previous problem. Explain why.)

解：20 枚のチケットを用意して、自分の分は必ず一枚買うとしておく。すると実際に売るのは、14 枚であるが、20 枚のチケットを 6 人で売り、それぞれが少なくとも一枚は売るとき何通りかと同じ種類あることが分かる。

[別の説明:] A, B, C, D, E, F のそれぞれが売る枚数を a, b, c, d, e, f とする。(b) においては、$a+b+c+d+e+f = 14$ である。これに一枚ずつ足して、$a' = a+1, b' = b+1, c' = c+1, d' = d+1, e' = e+1, f' = f+1$ とすると、$a'+b'+c'+d'+e'+f' = 20$ となっている。ここで (a, b, c, d, e, f) に (a', b', c', d', e', f') を対応させると、14 枚のチケットを 6 人が売った枚数の組と、20 枚のチケットを 6 人が最低一枚は売った枚数の組とが対応するので、これらの場合の数は等しい。

$$ \begin{array}{c} (a, b, c, d, e, f) \\ = (a'-1, b'-1, c'-1, d'-1, e'-1, f'-1) \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} (a+1, b+1, c+1, d+1, e+1, f+1) \\ = (a', b', c', d', e', f') \end{array} $$

Quiz 3

ID#: **Name:**

円盤を積む場所が3箇所 (A, B, C とする) あり、その一つに大きさの異なる n 枚の円盤が下から大きい順に積まれており、円盤の移動は1回につき1枚、円盤の上にはより小さな円盤しか載せないとする。この条件のもとで、次の命題を考える。
$p(n)$: $2^n - 1$ 回の移動ですべての円盤を指定された他の場所に移動させることができる。(Hanoi's Tower with n disks can be completed in $2^n - 1$ steps.)

1. $p(6)$ は真だとし $p(7)$ が真であることを説明せよ。(Explain that $p(7)$ is true assuming that $p(6)$ is true.)

2. $n = 4$ で A から C に最短手数で移すとき A の一番小さい円盤は最初に B, C のどちらに移したらよいか。$n = 5$ のときはどうか。(Move from A to C. What is the first move when $n = 4$ and $n = 5$? Assume that the total number of steps is minimum.)

   $n = 4$ のときの最初の移動先 (First move the smallest to)： B　C　(適切な方に丸)
   $n = 5$ のときの最初の移動先 (First move the smallest to)： B　C　(適切な方に丸)

3. 円盤を小さい方から $1, 2, \ldots, 7$ とし、今それぞれ、7 が A に、5,4,3,2,1 が下から順に B に、 6 が C の柱に通してあるとする。最短手順で 7 を A 以外に移動しその上にすべて積むことにすると、それは、どこに積まれることになるか。またそれまで、何回移動が必要か。(A: 7, B: 5, 4, 3, 2, 1, C: 6. Move A to B or C and complete it with minimum number of moves.)

   移動先 (Move to)： B　C　(適切な方に丸)　移動回数 (How many moves?)：________ 回

Message 欄（裏にもどうぞ）：最近のことで、とても嬉しかった（感謝している）こと、悲しかったこと、怒っていること。(Anything that made you rejoice, sad or angry, or you are thankful of recently?)（「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 3

円盤を積む場所が 3 箇所 (A, B, C とする) あり、その一つに大きさの異なる n 枚の円盤が下から大きい順に積まれており、円盤の移動は 1 回につき 1 枚、円盤の上にはより小さな円盤しか載せないとする。この条件のもとで、次の命題を考える。
$p(n)$: $2^n - 1$ 回の移動ですべての円盤を指定された他の場所に移動させることができる。(Hanoi's Tower with n disks can be completed in $2^n - 1$ steps.)

1. $p(6)$ は真だとし $p(7)$ が真であることを説明せよ。(Explain that $p(7)$ is true assuming that $p(6)$ is true.)

   解：最初に 7 枚積まれている場所を A' 移動先を B' とし、三箇所のうのちもう一箇所を C' とする。

   Step 1. $p(6)$ は真であるから、A' に積まれている小さい方から 6 枚を $2^6 - 1 = 63$ 回の移動で C' に移すことができる。

   Step 2. Step 1 によって A' には一番大きい盤のみがあり他はすべて C' にあるから、B' には一枚も盤がないので、A' にある一番大きな盤を B' に一回の移動で移すことができる。

   Step 3. Step 2 により A' には一枚も盤はなく、B' には一番大きい盤のみ、C' には、小さい方から 6 枚の盤が積まれている。$p(6)$ あ真だから、$2^6 - 1 = 63$ 回の移動で B' に C' の 6 枚全てを移動し、完成する事ができる。合計の移動回数は、Step 1, 2, 3 併せて

   $$(2^6 - 1) + 1 + (2^6 - 1) = 2 \times 2^6 - 1 = 2^7 - 1. \quad 63 + 1 + 63 = 127 = 2^7 - 1.$$

   最初の A', B', C' はそれぞれ A, B, C のどんな順列でも良かったから、$p(7)$ は真であることを示すことができた。

2. $n = 4$ で A から C に移すとき A の一番小さい円盤は最初に B, C のどちらに移したらよいか。$n = 5$ のときはどうか。(Move from A to C. What is the first move when $n = 4$ and $n = 5$?)

   $n = 4$ のときの最初の移動先 (First move the smallest to)： B
   $n = 5$ のときの最初の移動先 (First move the smallest to)： C

   解説. 小さい方から順に盤に、1, 2, 3, 4, 5 と名前をつける。

   $n = 4$ のときは、最終的に 4 を C に移動したい。そのためには、1–3 を B に移動したい。そのためには、1–2 を C に移動できればよい。そのためには、1 を B に最初に移動することが必要である。

   $n = 5$ のときも同様に順に考えると、1 を C に移動することが最初のステップであることが分かる。実際、n が奇数なら、最初のステップは全体の移動先と同じで、偶数なら、全体の移動先ではないところに動かすことになる。

3. 円盤を小さい方から $1, 2, \ldots, 7$ とし、今それぞれ、7 が A に、5,4,3,2,1 が下から順に B に、 6 が C の柱に通してあるとする。最短手順で 7 を A 以外に移動しその上にすべて積むことにすると、それは、どこに積まれることになるか。またそれまで、何回移動が必要か。(A: 7, B: 5, 4, 3, 2, 1, C: 6. Move A to B or C and complete it with minimum number of moves.)

   移動先 (Move to)： B　　移動回数 (How many moves?)：<u>95</u> 回

   Step 1. 5 枚を C に載せるのに $2^5 - 1 = 31$ 回、一番大きい盤を B に移動するのに 1 回、その上に、6 枚を載せるのに、$2^6 - 1 = 63$ 回。したがって、$31 + 1 + 63 = 95$ 回。

   これが最短であることを示すのは、あまり簡単ではないが、上でのべた移動が最小であることが分かるので、これは、その中に含まれているので最短である。他の説明も考えてみて下さい。

Quiz 4

ID#: **Name:**

1. ある年度アーツサイエンス学科の 4 月入学生は 683 人いた。この中には、First Initial も Last Initial も同じ学生が絶対にいたことを鳩の巣原理を用いて説明してください。（アルファベットは 26 文字）Among 693 April students, there is a pair with the same first and last initial.

2. 冬休みの 14 日間に 20 冊の本を読み、必ず毎日一冊は読み終える事にし、読み終わった日を記録した。ある日からある日の間に読み終わった本の合計がちょうど 7 冊になるような期間が必ずあることを鳩の巣原理を用いて説明してください。If 20 books were read in 14 days and at least one each day, then the total number of books read between some day to the other is exactly seven.

Message 欄（裏にもどうぞ）：どんなおとなが魅力的ですか。こどもの魅力は何でしょう。

Solutions to Quiz 4

1. ある年度アーツサイエンス学科の 4 月入学生は 683 人いた。この中には、First Initial も Last Initial も同じ学生が絶対にいたことを鳩の巣原理を用いて説明してください。（アルファベットは 26 文字）Among 693 April students, there is a pair with the same first and last initial.

   解：First Initial は 26 通り、Last Initial も 26 通りあるので、その組み合わせは $26 \times 26 = 676$ 通りである。683 人がこの 676 通りのイニシャルのうちのどれかで、$683 > 676$ だから鳩の巣原理によって、同じイニシャルの人が必ずいる事になる。 ■

2. 冬休みの 14 日間に 20 冊の本を読み、必ず毎日一冊は読み終える事にし、読み終わった日を記録した。ある日からある日の間に読み終わった本の合計がちょうど 7 冊になるような期間が必ずあることを鳩の巣原理を用いて説明してください。If 20 books were read in 14 days and at least one each day, then the total number of books read between some day to the other is exactly seven.

   解：1 日目に読んだ本の数を a_1、2 日目に読んだ本の数を a_2、おなじように 14 日目に読んだ本の数を a_{14} とする。さらに、$b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$, などとし、$b_{14} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{14}$ とする。すると b_1 は、1 日目に読み終わった本の数、b_2 は、2 日目までに読み終わった本の数、b_{14} は 14 日目までに読み終わった本の数などとなる。一日かならず、1 冊は読むのだから、

$$1 \leqq b_1 < b_2 < \cdots < b_{14} = 20. \tag{1}$$

   ここでこれらに 7 を加えたものを考えると

$$8 \leqq b_1 + 7 < b_2 + 7 < \cdots < b_{14} + 7 = 27. \tag{2}$$

   すると、次のようになっている。

$$1 \leqq b_1, b_2, \ldots, b_{14}, b_1 + 7, b_2 + 7, \ldots, b_{14} + 7 \leqq 27$$

   28 個の数がみな 1 以上 27 以下だからかならず同じ数が存在する。$b_1, b_2, \ldots, b_{14}$ は (1) よりすべて異なり、$b_1+7, b_2+7, \ldots, b_{14}+7$ は (2) よりすべて異なるので、同じになるのは、$b_1, b_2, \ldots, b_{14}$ のどれかと、$b_1+7, b_2+7, \ldots, b_{14}+7$ のどれかである。それを b_i と b_j+7 とすると、$b_i = b_j+7$ だから $b_i - b_i = 7$。一方、b_i, b_j の定義を考えると、$i > j$ だから

$$b_i - b_i = (a_1 + a_2 + \cdots + a_j + a_{j+1} + \cdots + a_i) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_j) = a_{j+1} + \cdots + a_i$$

   この数が、$b_i - b_i = 7$ より 7 だから、$j + 1$ 日目から i 日目までに読み終わった本の数の合計は 7 冊であることを意味している。 ■

Quiz 5

ID#: **Name:**

1. S 夫人によると、最近夫と同伴でパーティーに出席したが、そこには、S 夫妻を含め 10 組の夫婦がおり、誰も自分の同伴者とは握手をせず、S 夫人以外は、皆異なる回数握手したという。このとき以下のことを説明せよ。Ten couples including Mr. & Mrs. S participated in a party. Mrs. S found out that no one shook hands with one's spouse and everyone (besides Mrs. S) shook hands with different number of people. Explain the following.

   (a) S 夫人は、奇数回握手した。Mrs. S shook hands with odd number of people.

   (b) 18 人と握手した人がただ一人いる。There is exactly one who shook hands with 18 people.

   (c) 18 人と握手した人の配偶者はだれとも握手しなかった。The spouse of the one who shook hands with 18 people shook hands with nobody.

2. 7×7 のチェス盤で Knight はすべてのマスを丁度一回まわってもとのところに戻ることはできない。 On 7×7 size board, Knight cannot visit all places once and come back.

Message 欄（裏にもどうぞ）： (1) 結婚について、家庭について、子供について。About marriage, family and children. (2) この授業について。要望・改善点など。About this course; requests and suggestions for improvement.（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。If you wish, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 5

1. S 夫人によると、最近夫と同伴でパーティーに出席したが、そこには、S 夫妻を含め 10 組の夫婦がおり、誰も自分の同伴者とは握手をせず、S 夫人以外は、皆異なる回数握手したという。このとき以下のことを説明せよ。(Ten couples including Mr. & Mrs. S participated in a party. Mrs. S found out that no one shook hands with one's spouse and everyone (besides Mrs. S) shook hands with different number of people. Explain the following.

   (a) S 夫人は、奇数回握手した。Mrs. S shook hands with odd number of people.
   解： 同伴者とは握手しないから握手の回数は最大で 18、最小で 0 の 19 通り。S 夫人以外の 19 人は異なる回数握手したから、これら 19 通りの回数握手した人が必ず一人ずつはいることになる。この中で奇数回握手した人（すなわち、1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 回握手した人たち）は、全部で 9 人いる。Theorem 5.1 により奇数回握手した人は偶数人いないといけないので、この 19 人に含まれていない S 夫人の握手した回数は、奇数回である。

   (b) 18 人と握手した人がただ一人いる。There is exactly one who shook hands with 18 people.
   解： 前問の解答から、S 夫人以外に 18 人握手した人がひとりおり、S 夫人は、奇数回握手したのだから、ちょうど一人だけ、18 人と握手した人はいることになる。

   (c) 18 人と握手した人の配偶者はだれとも握手しなかった。The spouse of the one who shook hands with 18 people shook hands with nobody.
   解： 18 人と握手した人は、自分と自分の配偶者以外すべてと握手したことになる。しかし (a) よりだれとも握手しなかった人もいる。このひとは、18 人と握手した人とも握手しなかったのだから、その可能性のあるのは、この人の配偶者だけである。したがって、18 人と握手した人の配偶者はだれとも握手しなかった。

2. 7×7 のチェス盤で Knight はすべてのマスを丁度一回まわってもとのところに戻ることはできない。 On 7×7 size board, Knight cannot visit all places once and come back.

   解： チェス盤を市松模様に白黒にぬると、一方が 25 マス、他方が 24 マスとなる。Knight は白から黒、黒から白へと移動するので、一周まわってもどるとすると、最後 49 番目の場所の色は、最初のマスの色と同じになる。そこで、49 番目のマスから最初のマスに戻ることができない。

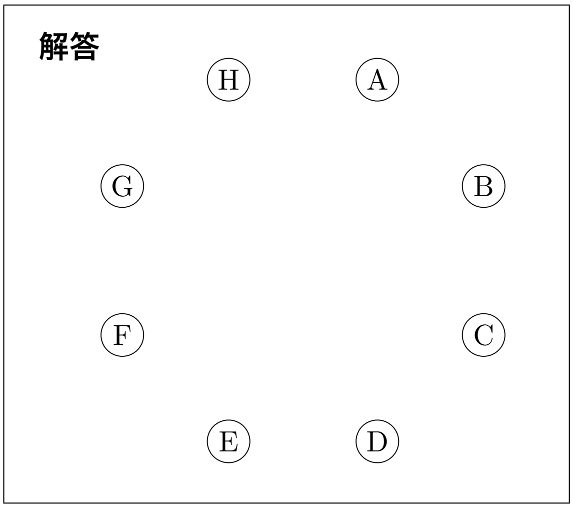
   別解． 一周まわってもとに戻ることができるとすると、順に番号を振り、それぞれ次のマス目に移動することができるはずである。しかし、一方の色は 25 あり、そこからもう一方の色のマスに移動することはできない。

Quiz 6

ID#: **Name:**

1. 頂点数が 8 の木について次の問に答えよ。Consider trees with 8 vertices.
   (a) 7 頂点の次数が $2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$ であるとき残りの一つの頂点の次数はいくつか。What is the degree of the remaining vertex if the degrees of seven vertices are $2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$?
   (b) 前問の条件を満たす（同型でない）木が 3 種類ある。これらを図示せよ。Depict three non-isomorphic trees satisfying the condition in the previous problem.

2. A, B, C, D, E, F, G, H の 8 地点を結ぶ（間接でも良い）ネットワークでコスト最小のものを作りたい。2 地点間を結ぶコストは下の表のように与えられているとき、そのネットワークを下の図に示し、コスト合計を書け。Find a most inexpensive network connecting A, B, C, D, E, F, G, H and its total cost by referring to the cost table below.



Cost Table

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	3	1	2	3	5	2	3
B	3	-	4	2	3	4	2	4
C	1	4	-	4	2	3	2	3
D	2	2	4	-	2	4	3	5
E	3	3	2	2	-	3	4	4
F	5	4	3	4	3	-	3	3
G	2	2	2	3	4	3	-	4
H	3	4	3	5	4	3	4	-

Total Cost: units

Message 欄（裏にもどうぞ）：国際人（World Citizen）とは。ICU のそして自分の「国際性」にとって必要なこと。（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。）

Solutions to Quiz 6

1. 頂点数が 8 の木について次の問に答えよ。Consider trees with 8 vertices.

   (a) 7 頂点の次数が $2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$ であるとき残りの一つの頂点の次数はいくつか。What is the degree of the remaining vertex if the degrees of seven vertices are $2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$?
   解：8 点の木の辺の数 e は 7 で、各頂点の次数の総和は辺の数の 2 倍だから、残りの頂点の次数を x とすると

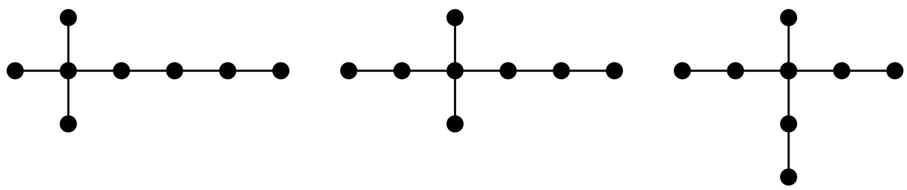
   $$2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + x = 2 \cdot 7.$$

   簡単にすると

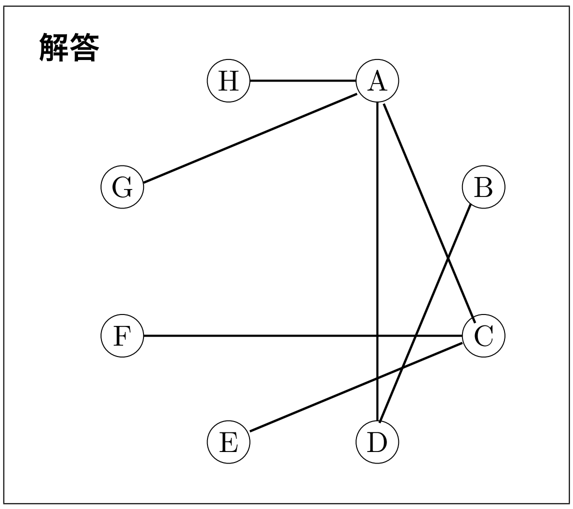
   $$10 + x = 14$$

   したがって、残りの頂点の次数は 4 である。 ■

   (b) 前問の条件を満たす（同型でない）木が 3 種類ある。これらを図示せよ。Depict three non-isomorphic trees satisfying the condition in the previous problem.
   解：次数が 1 の頂点は、それ以外に隣接する頂点がないのだから、これをのぞき、他の頂点の次数は $4, 2, 2, 2, 2$ これらがどのように隣接するかにより、以下の 3 種類となる。



2. A, B, C, D, E, F, G, H の 8 地点を結ぶ（間接でも良い）ネットワークでコスト最小のものを作りたい。2 地点間を結ぶコストは下の表のように与えられているとき、そのネットワークを下の図に示し、コスト合計を書け。Find a most inexpensive network connecting A, B, C, D, E, F, G, H and its total cost by referring to the cost table below.



Cost Table

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	3	$\underline{1}$	$\underline{2}$	3	5	$\underline{2}$	$\underline{3}$
B	3	-	4	$\underline{2}$	3	4	2	4
C	1	4	-	4	$\underline{2}$	3	2	3
D	2	2	4	-	$\underline{2}$	4	3	5
E	3	3	2	2	-	$\underline{3}$	4	4
F	5	4	3	4	3	-	3	3
G	2	2	2	3	4	3	-	4
H	3	4	3	5	4	3	4	-

Total Cost: 15 units

Connected であって、Total Cost が 15 であれば、上の Tree と同じでなくても正解です。ただし、その場合、必ず Tree となっています。どうしてだか分かりますか。

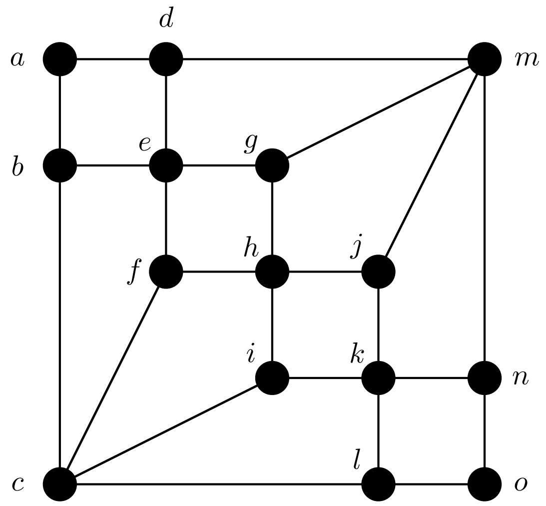
Quiz 7

ID#: **Name:**

1. 下のグラフはオイラーグラフではない。理由を簡単に説明せよ。Explain that the bottom graph is not Eulerian.

2. 下のグラフに何本か辺を付け加えてオイラーグラフにしたい。最低で何本必要か。加える辺を記号で答えよ。たとえば、a と e を辺とするなら、$\{a, e\}$. How many edges does it need to make the graph Eulerian? Describe edges to add.

3. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.



Message 欄（裏にもどうぞ）: 聖書を読んだことがありますか。キリスト教について、ICU の「C」について。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 7

1. 下のグラフはオイラーグラフではない。理由を簡単に説明せよ。Explain that the bottom graph is not Eulerian.

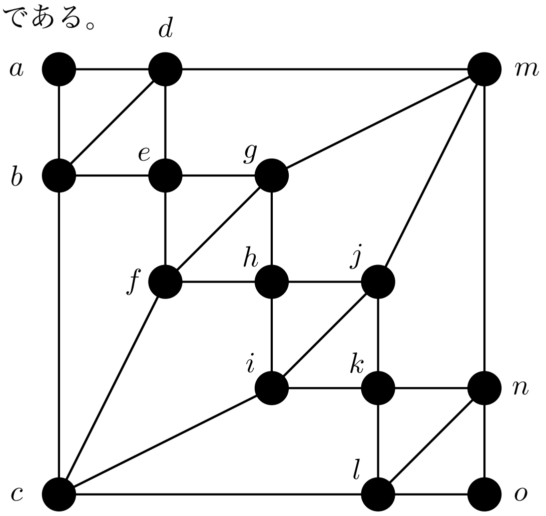
   解：頂点 b の次数は 3 である。Theorem 7.1 によりオイラーグラフの各頂点の次数は偶数であるから、このグラフはオイラーグラフではない。

2. 下のグラフに何本か辺を付け加えてオイラーグラフにしたい。最低で何本必要か。加える辺を記号で答えよ。たとえば、a と e を辺とするなら、$\{a, e\}$. How many edges does it need to make the graph Eulerian? Describe edges to add.

   解：次数が奇数の頂点は、$b.d, f, g, i, j, l, n$ したがって、4 本必要である。たとえば、

   $$\{b, d\}, \{f, g\}, \{i, j\}, \{l.n\}$$

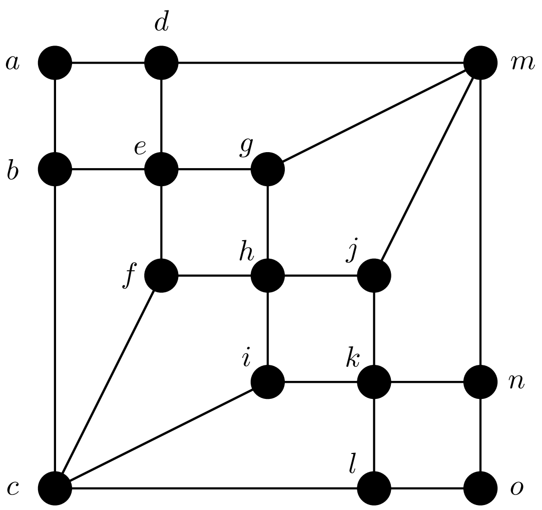
   である。

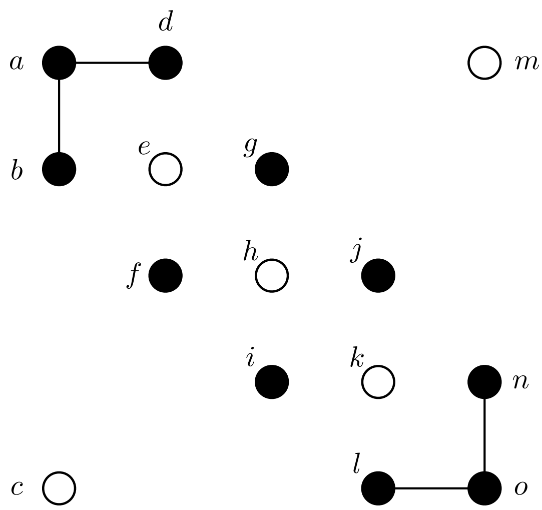


3. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$.

   解：$S = \{c, e, h, k, m\}$ とし、これらの頂点を除いたグラフを Δ (右下のグラフ) とする。すると、$\omega(\Delta) = 6 > 5 = |S|$ だから Theorem 7.3 よりこのグラフはハミルトングラフではない。■

   別解:　さらに、a, o を除き、$S = \{a, c, e, h, k, m, o\}$ としてもよい。このときは、$\omega(\Delta) = 8$. ■

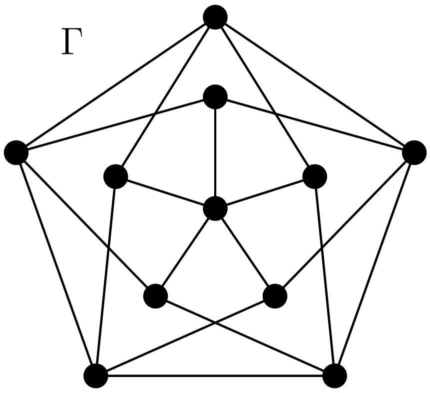




Quiz 8

ID#: **Name:**

1. 下のグラフ Γ は 平面的グラフではないことを示せ。Show that Γ is non-planar.



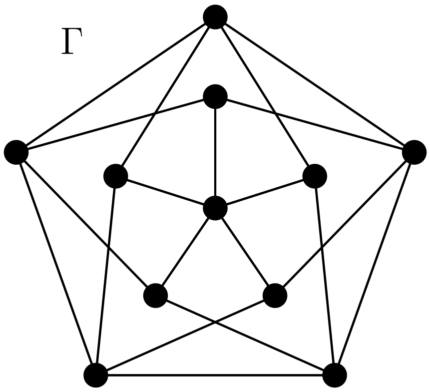
2. ある連結な平面グラフは、4-正則で、各面はすべて 3 辺形か 4 辺形である。このグラフの 3 辺形の総数を求めよ。A connected plane graph is 4-regular and every face is either a 3-gon or a 4-gon. Find the number of 3-gons.

Message 欄（裏にもどうぞ）: (1) 日本・世界の教育について。(2) ICU の教育について。特に改善点について。

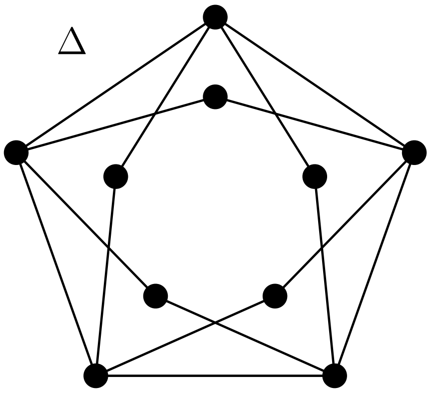
Solutions to Quiz 8

1. 下のグラフ Γ は 平面的グラフではないことを示せ。Show that Γ is non-planar.

Γ



Δ



解：このグラフは、頂点数 $v = 11$, 辺の数 $e = 20$ である。Γ が 平面的グラフだとして、矛盾を導く。Γ が平面的グラフだと仮定して、平面グラフに描き、面の数を f とすると、オイラーの公式 (Theorem 8.1) より、

$$2 = v - e + f = 11 - 20 + f.$$

より、$f = 11$ となる。またこのグラフには、三辺形は存在しない。従って 11 個の各面は、少なくとも 4 本の辺で囲まれているので、Proposition 8.2 (ii) より

$$40 = 2e = n_1 + n_2 + \cdots + n_{12} \geqq 4 \cdot 11 = 44.$$

これは、矛盾である。したがって、Γ は平面的グラフではない。 ■

別解：真ん中の頂点を除いたグラフを Δ とする。すると、左下のグラフができるが、それは、K_5 の 6 本の辺を長さ 2 の路に取り替えたグラフになっている。K_5 は非平面的グラフであるので、その辺に頂点を加えただけの Δ も非平面的である。したがって、Δ を含む Γ も非平面的である。 ■

2. ある連結な平面グラフは、4-正則で、各面はすべて 3 辺形か 4 辺形である。このグラフの 3 辺形の総数を求めよ。A connected plane graph is 4-regular and every face is either a 3-gon or a 4-gon. Find the number of 3-gons.

解：頂点の数を v、 辺の数を e、面の総数を f、3 辺形からなる面の数を t とする。面を $F_1, F_2, \ldots, F_f$ とし、それらを囲む辺の数をそれぞれ $n_1, n_2, \ldots, n_f$ とし、$F_1, \ldots, F_t$ は 3 辺形、$F_{t+1}, \ldots, F_f$ ($f - t$ 個) は 4 辺形とする。このとき定義より、$n_1 = n_2 = \cdots = n_t = 3$ で、$n_{f+1} = n_{f+2} = \cdots = n_f = 4$ である。従って、Proposition 8.2 (i) (ii) より、

$$4v = 2e, \quad 2e = n_1 + n_2 + \cdots + n_t + n_{t+1} + n_{t+2} + \cdots + n_f = 3t + 4(f - t) = 4f - t.$$

したがって、オイラーの公式（Theorem 8.1）より

$$2 = \frac{2e}{4} - e + \frac{2e + t}{4} = \frac{t}{4}.$$

これより、$t = 8$ を得る。従って 3 辺形の個数は常に 8 である。 ■

正八面体グラフ (octahedron graph) や、立方八面体グラフ (cuboctahedron graph) はこの例である。検索してみてください。