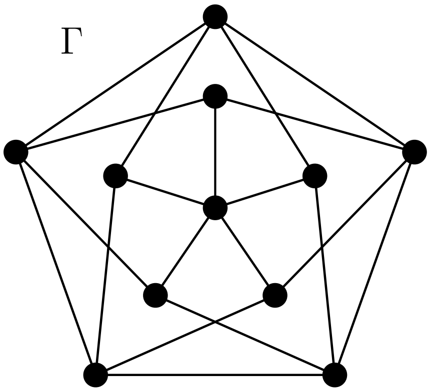
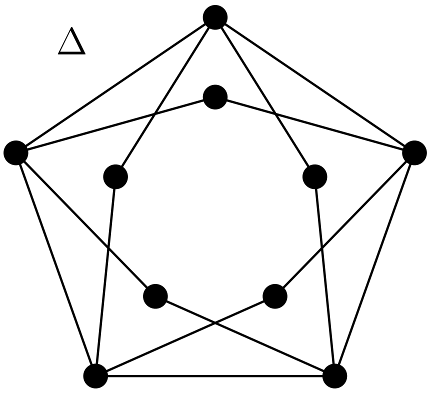
Solutions to Quiz 8

1. 下のグラフ Γ は 平面的グラフではないことを示せ。Show that Γ is non-planar.

Γ



Δ



解：このグラフは、頂点数 $v = 11$, 辺の数 $e = 20$ である。Γ が 平面的グラフだとして、矛盾を導く。Γ が平面的グラフだと仮定して、平面グラフに描き、面の数を f とすると、オイラーの公式 (Theorem 8.1) より、

$$2 = v - e + f = 11 - 20 + f.$$

より、$f = 11$ となる。またこのグラフには、三辺形は存在しない。従って 11 個の各面は、少なくとも 4 本の辺で囲まれているので、Proposition 8.2 (ii) より

$$40 = 2e = n_1 + n_2 + \cdots + n_{12} \geqq 4 \cdot 11 = 44.$$

これは、矛盾である。したがって、Γ は平面的グラフではない。 ■

別解：真ん中の頂点を除いたグラフを Δ とする。すると、左下のグラフができるが、それは、K_5 の 6 本の辺を長さ 2 の路に取り替えたグラフになっている。K_5 は非平面的グラフであるので、その辺に頂点を加えただけの Δ も非平面的である。したがって、Δ を含む Γ も非平面的である。 ■

2. ある連結な平面グラフは、4-正則で、各面はすべて 3 辺形か 4 辺形である。このグラフの 3 辺形の総数を求めよ。A connected plane graph is 4-regular and every face is either a 3-gon or a 4-gon. Find the number of 3-gons.

解：頂点の数を v、 辺の数を e、面の総数を f、3 辺形からなる面の数を t とする。面を $F_1, F_2, \ldots, F_f$ とし、それらを囲む辺の数をそれぞれ $n_1, n_2, \ldots, n_f$ とし、$F_1, \ldots, F_t$ は 3 辺形、$F_{t+1}, \ldots, F_f$ ($f - t$ 個) は 4 辺形とする。このとき定義より、$n_1 = n_2 = \cdots = n_t = 3$ で、$n_{f+1} = n_{f+2} = \cdots = n_f = 4$ である。従って、Proposition 8.2 (i) (ii) より、

$$4v = 2e, \quad 2e = n_1 + n_2 + \cdots + n_t + n_{t+1} + n_{t+2} + \cdots + n_f = 3t + 4(f - t) = 4f - t.$$

したがって、オイラーの公式（Theorem 8.1）より

$$2 = \frac{2e}{4} - e + \frac{2e + t}{4} = \frac{t}{4}.$$

これより、$t = 8$ を得る。従って 3 辺形の個数は常に 8 である。 ■

正八面体グラフ (octahedron graph) や、立方八面体グラフ (cuboctahedron graph) はこの例である。検索してみてください。