Quiz 1

Division: **ID#:** **Name:**

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを下の真理表を完成することによって判定せよ。(Let p, q and r be propositions. Determine whether the following formula holds or not by completing the truth table below.)

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv (\neg p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r). \quad \text{判定 (Does this hold?)：Yes, No.}$$

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$(\neg p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\wedge$ と括弧のみを用い、$\Rightarrow$ と $\vee$ を用いずに表せ。式の変形の過程も示すこと。(Express $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ using $\neg$, $\wedge$ and parentheses. Do not use neither $\vee$ nor $\Rightarrow$. Show work!)

3. 以下の式がトートロジー（常に真）になるように下線部に $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow$ の何れかの記号を入れよ。(Insert $\wedge, \vee, \Rightarrow$ or $\Leftarrow$ in the underlined space so that the following is tautology, i.e., always valid.)

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \quad \underline{\qquad} \quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

4. x, y を命題、y はトートロジーならば、$x \equiv x \wedge y$ が常に成立することを説明せよ。(For propositions, x and y, suppose y is tautology. Explain why $x \equiv x \wedge y$ always holds.)

Message 欄：将来の夢、25 年後の自分について、世界について。What is your dream? Describe your vision of yourself and the world 25 years from now.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you wish, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 1

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つかどうかを下の真理表を完成することによって判定せよ。(Let p, q and r be propositions. Determine whether the following formula holds or not by completing the truth table below.)

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv (\neg p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r). \quad \text{判定 (Does this hold?)：} \boxed{\text{Yes}}, \text{No.}$$

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$			$(\neg p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$			$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T
T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F
T	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T
T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T
F	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	T
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T
F	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	T

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\wedge$ と括弧のみを用い、$\Rightarrow$ と $\vee$ を用いずに表せ。式の変形の過程も示すこと。(Express $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ using $\neg$, $\wedge$ and parentheses. Do not use neither $\vee$ nor $\Rightarrow$. Show work!)

解：(A) $x \Rightarrow y \equiv (\neg x) \vee y$ と (B) $x \vee y \equiv \neg((\neg x) \wedge (\neg y))$ と (C) $\neg(\neg x) \equiv x$ を用いる。

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \quad &\overset{(1)}{\equiv} \quad \neg(p \Rightarrow q) \vee r \quad \overset{(2)}{\equiv} \quad \neg(\neg p \vee q) \vee r \quad \overset{(3)}{\equiv} \quad \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(\neg r)) \\ &\overset{(4)}{\equiv} \quad \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg r)) \quad \overset{(5)}{\equiv} \quad \neg(\neg(p \wedge (\neg q)) \wedge (\neg r))\end{aligned}$$

(1) $x = p \Rightarrow q$, $y = r$ とおいて (A), (2) (A), (3) (C), (4) (B), (5) (B) と (C) ■

3. 以下の式がトートロジー（常に真）になるように下線部に $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow$ の何れかの記号を入れよ。(Insert $\wedge, \vee, \Rightarrow$ or $\Leftarrow$ in the underlined space so that the following is tautology, i.e., always valid.)

解：上の真理表の通り、$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ が 真のときは、$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ は常に真だから、

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \quad \underline{\Rightarrow} \quad (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

4. x, y を命題、y はトートロジーならば、$x \equiv x \wedge y$ が常に成立することを説明せよ。(For propositions, x and y, suppose y is tautology. Explain why $x \equiv x \wedge y$ always holds.)

解：$x \wedge y$ が真となるのは、x と y が両方とも真となるとき、またその時に限るが、y は常に真なので、x が真のとき、またその時に限り $x \wedge y$ は真になる。したがって、$x \wedge y \equiv x$ である。x, y について x と $x \wedge y$ の下のような真理表を書いても良い。 ■

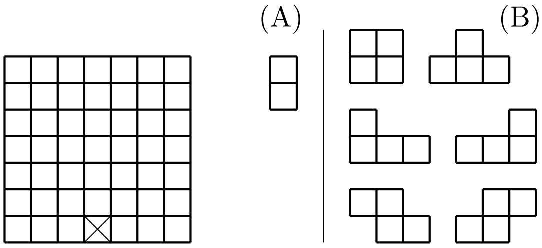
x	y	$x \wedge y$
T	T	T
F	T	F

Quiz 2

Division: **ID#:** **Name:**

1. 下の盤の × ついていない 48 個のマスを、(A) の正方形 2 個の板、(B) のような正方形 4 個の 6 種の板で重なることなく敷き詰めることを考える。これらの板は十分な数あるものとする。

   (a) (A) の板では敷き詰めることができないことを説明せよ。(Explain impossibility of covering up by pieces of type (A) without overlapping.)

   (b) (B) の板で敷き詰めるとき、6 種類の内一つは絶対に必要である。それはどれか。またその理由を記せ。(The use of one of the 6 types in (B) is absolutely necessary. Which is the one? Explain why.)

2. つぎの数を求め、なぜそのようになるかを簡単に説明せよ。${}_nC_r$, ${}_nP_r$, および $n!$ の値を計算しなくてよい。(No need to evaluate ${}_nC_r$, ${}_nP_r$ or $n!$.)

   (a) 16 個のクッキーを 7 人家族で分ける分け方の種類。(How many ways are there to share 16 cookies by a family of seven?)

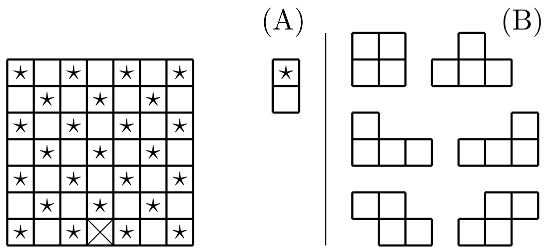
   (b) 7 個の相異なるショートケーキを 7 人家族で一人一つずつ分ける分け方の種類。(How many ways are there to distribute 7 different types of shortcakes by a family of seven?)

Message 欄（裏にもどうぞ）： あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。What is most precious to you?（「HP 掲載不可」は明記の事。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 2

1. 下の盤の × ついていない 48 個のマスを、(A) の正方形 2 個の板、(B) のような正方形 4 個の 6 種の板で重なることなく敷き詰めることを考える。これらの板は十分な数あるものとする。

   (a) (A) の板では敷き詰めることができないことを説明せよ。(Explain impossibility of covering up by pieces of type (A) without overlapping.)



解：左の図のように、$\star$ を市松模様に書くと、それは 25 個ある。一方、(A) の板で敷き詰めることができたとすると、マスは 48 あるので、板は 24 必要である。また、板をタテにおいてもヨコにおいても一枚ごとに $\star$ のついているマスが一つ $\star$ のついていないマスが一つずつ覆われることになる。したがって、24 枚では、ちょうど 24 の $\star$ のついているマスが覆われ、$\star$ が 25 ついている盤全体を覆うという仮定に反する。したがって、(A) の板で重なることなく覆うことはできない。 ■

   (b) (B) の板で敷き詰めるとき、6 種類の内一つは絶対に必要である。それはどれか。またその理由を記せ。(The use of one of the 6 types in (B) is absolutely necessary. Which is the one? Explain why.)

   解：右上の逆 T の字の板は絶対に必要である。この板を使わないと敷き詰めることができないことを示す。右上の逆 T の字の板以外で、敷き詰めることができたとする。他の 5 種類は、それぞれ (A) の板 2 個で覆うことができるので、右上の T の字の板以外で敷き詰めた一つ一つの板を (A) の盤 2 個で置き換えれば、(A) の板で敷き詰めることができることになる。これは、(a) に反するので、右上の逆 T の字の板以外で、敷き詰めることはできない。(ここで説明したのは、逆 T の字がなければ敷き詰めることができないことである。逆 T の字を使うと「敷き詰められる」ことも確かめることができます。しかしそれは、問いの一部ではないので、示していません。) ■

2. つぎの数を求め、なぜそのようになるかを簡単に説明せよ。${}_nC_r$, ${}_nP_r$, および $n!$ の値を計算しなくてよい。(No need to evaluate ${}_nC_r$, ${}_nP_r$ or $n!$.)

   (a) 16 個のクッキーを 7 人家族で分ける分け方の種類。(How many ways are there to share 16 cookies by a family of seven?)

   解：仕切りとなるものを 6 個用意する。16 個のクッキーと仕切りをあわせた 22 個を一列に並べれば、一方から区切りまでを一人ずつ取っていけばよいので、22 個の中のどこに 6 個の仕切りが入っているかが、7 人家族で分ける分け方の種類である。したがって その数は ${}_{22}C_6 = 74,613$ である。 ■

   (b) 7 個の相異なるショートケーキを 7 人家族で一人一つずつ分ける分け方の種類。(How many ways are there to distribute 7 different types of shortcakes by a family of seven?)

   解：7 個のショートケーキを一列に並べ、順に取っていけばよいから、一列にならべる順列の数と同じである。それは、${}_7P_7 = 7! = 5,040$ である。 ■

   クッキーも、ケーキもみんなで分けるとたくさんの楽しみ方があるものですね。

Quiz 3

Division: **ID#:** **Name:**

1. 「3^n 個 $(n = 1, 2, \ldots)$ のおもりに一つだけ重さが違っている不良品がまざっている。また、その不良品が重いか軽いかはわかっている。天秤を n 回使うと、その不良品を発見できる。」このことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

2. 14 個のおもりに一つだけ重さが違っている不良品がまざっているが、それが重いか軽いかはわからない。また 9 個の正しいおもりが別にある。天秤を 3 回使うと、その不良品を発見できることを 1 がすでに証明されているとして、そのことを使って、説明せよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：最近のことで、とても嬉しかった（感謝している）こと、悲しかったこと、怒っていること。(Anything that made you rejoice, sad or angry, or you are thankful of recently?)（「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 3

1. 「3^n 個 $(n = 1, 2, \ldots)$ のおもりに一つだけ重さが違っている不良品がまざっている。また、その不良品が重いか軽いかはわかっている。天秤を n 回使うと、その不良品を発見できる。」このことを 数学的帰納法を用いて証明せよ。

   解：$n = 1$ のとき。3 個のおもりを A, B, C とし、1 回で、判定できることを示す。A, B を天秤に載せる。釣り合えば、C が不良品である。釣り合わなければ、不良品が重いとわかっているときは、天秤が下がった方に載っているものが不良品、不良品が軽いとわかっているときは、天秤が上がったほうに載っているものが不良品である。

   $n = k$ のときは、k 回で発見できるとする。$n = k + 1$ のとき $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k$ 個のおもりを、3^k 個ずつ三つに分ける。それらを A, B, C のグループとする。A のグループと B のグループを天秤に載せる。釣り合えば、C のグループの 3^k 個に不良品であることがわかる。帰納法の仮定から、k 回で、不良品を見つけることができる。最初の一回とあわせて $k + 1$ 回で不良品を発見できる。釣り合わなければ、不良品が重いとわかっているときは、天秤が下がった方に載っている 3^k 個に不良品がまざっている、不良品が軽いとわかっているときは、天秤が上がったほうに載っている 3^k 個に不良品がまざっている。いずれも、帰納法の仮定から k 回天秤を用いることで不良品を発見できる。最初の一回とあわせて、いずれの場合も、$k + 1$ 回天秤を用いることで、不良品を発見することができた。したがって、数学的帰納法の定理によって、任意の自然数 n について 上の命題が成立することが証明できた。 ■

2. 14 個のおもりに一つだけ重さが違っている不良品がまざっているが、それが重いか軽いかはわからない。また 9 個の正しいおもりが別にある。天秤を 3 回使うと、その不良品を発見できることを 1 がすでに証明されているとして、そのことを使って、説明せよ。

   解：まず、14 個のうち 9 個と、9 個の正常なおもりを天秤にかける。釣り合わない時をまず考える。そのときは、正常なおもりと天秤にかけたのだから、これら 9 個の中に不良品があり、それが重いか、軽いかもわかることになる。すると、$9 = 3^2$ だから、1 の $n = 2$ の場合より、あと 2 回で不良品を見つけることができる。つまり、最初の一回と併せて 3 回で不良品を見つけ出すことができる。

   次に、釣り合う場合を考える。このときは、のこりの 5 個に不良品が入っていることがわかる。そこで、このうちの 3 個と、正常なおもり 3 個を秤にかける。まず釣り合わない時を考える。そのときは、正常なおもりと天秤にかけたのだから、これら 3 個の中に不良品があり、それが重いか、軽いかもわかることになる。すると、$3 = 3^1$ だから、1 の $n = 1$ の場合より、あと 1 回で不良品をみつけることができる。合計 3 回で、不良品を見つけることができる。

   最後に残ったのは、一回目に釣り合い、二回目も釣り合った場合である。このときは、$14-9-3 = 2$ 個の中に、不良品があることになる。その一方をとり、正常なおもり一個と秤にかける。釣り合わなければ、この一個が不良品であることがわかり、釣り合うときには、秤に載せなかった方が不良品だとわかる。 ■

   三回とも釣り合ったときだけはそれが、正常より重いか軽いかがわからない。13 個なら正常より重いか軽いかも判断できます。また、この問題では、簡単のために 9 個正常なおもりを使いましたが、そんなにはいりません。幾つ必要でしょうか。1 個でできませんか。

   分銅が初夢などという人が居ないことを願います。

Quiz 4

Division: **ID#:** **Name:**

1. 「数学の世界」のクラスの受講生は 85 人である。このうち 46 人が ID 14 であり、また、 95% 以上が 18 歳から 22 歳の間（18 歳以上 22 歳以下）の年齢であるとする。このとき鳩ノ巣原理を用い、次の命題がいつでも正しくなるような自然数で (a), (b) においては、最大のものを、(c) においては、最小のものを $\boxed{}$ に入れよ。

   (a) 受講生の誕生月（1 月から 12 月）が

   $\boxed{}$ 人以上の月が必ずある。

   (b) 受講生の中に同じ年齢の人が

   $\boxed{}$ 人以上いる年齢がある。

   (c) ID14 の受講生の中で誕生月が

   $\boxed{}$ 人以下しかいない月が必ずある。

2. 「数学の世界」の授業は 27 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、53 問は越さない（at most 53 problems）ものとする。このときちょうど 27 問考える期間があることを受講生以外にも理解できるように説明せよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：どんなおとなが魅力的ですか。こどもの魅力は何でしょう。

Solutions to Quiz 4

1. 「数学の世界」のクラスの受講生は 85 人である。このうち 46 人が ID 14 であり、また、 95% 以上が 18 歳から 22 歳の間（18 歳以上 22 歳以下）の年齢であるとする。このとき鳩ノ巣原理を用い、次の命題がいつでも正しくなるような自然数で (a), (b) においては、最大のものを、(c) においては、最小のものを $\boxed{}$ に入れよ。

   (a) 受講生の誕生月（1 月から 12 月）が　　　Variation 1 の応用

   $\boxed{8}$ 人以上の月が必ずある。($85 > 12 \cdot k$ を満たす最大の k は 7。)

   (b) 受講生の中に同じ年齢の人が　　　Variation 1 の応用

   $\boxed{17}$ 人以上いる年齢がある。($85 \cdot 0.95 = 80.75$ より 81 人以上が 5 歳の範囲にいる。$81 > 5 \cdot k$ を満たす最大の k は 16。)

   (c) ID14 の受講生の中で誕生月が　　　Variation 2 の応用

   $\boxed{3}$ 人以下しかいない月が必ずある。($46 < 12 \cdot k$ を満たす最小の k は 4。)

2. 「数学の世界」の授業は 27 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、53 問は越さない（at most 53 problems）ものとする。このときちょうど 27 問考える期間があることを受講生以外にも理解できるように説明せよ。

   解： i 時間目までに考えた問題数の合計を b_i で表すことにします。b_1 は一時間目に考えた問題数、b_3 は 1 時間目から 3 時間目までに考えた問題数の合計で b_{27} は 27 時間目までに考えた問題数の合計ですが、全部で 27 時間ですから、全期間で考えた問題の数となります。また、$b_3 - b_1$ は 3 時間目までに考えた問題の数から 1 時間目に考えた問題の数を引いていますから、2 時間目と 3 時間目に考えた問題の数の合計となります。すると $b_j - b_i$ は j 時間目までに考えた問題数から、i 時間目までに考えた問題数を引いているので、i 時間目の次の時間つまり $i+1$ 時間目から j 時間目までに考えた問題の数の合計ということになります。問題を見ると、最初から j 時間目の問題数 b_j または $i+1$ 時間目から j 時間目の問題数 $b_j - b_i$ がちょうど 27 になる期間があることを示したいということが分かります。そこで、$b_0 = 0$ としておくと、$b_j = b_j - b_0$ ですから、結局 $b_j - b_i = 27$ となる i, j が $0 \leq i < j \leq 27$ の範囲に見つかれば良いことが分かります。また、全部で 53 問以下ですから、もし、$b_j - b_i$ が 27 の倍数になるような i と j が見つかれば、$i+1$ 時間目から j 時間目までに考えた問題数が $27 \cdot 2 = 54$ 問や $27 \cdot 3 = 81$ 問になることはないので $b_j - b_i = 27$ であることが分かります。従って「$b_j - b_i$ が 27 の倍数となる i, j が $0 \leq i < j \leq 27$ の範囲に必ずあること」を示せば良いことがわかります。

   そこで $b_0, b_1, \ldots, b_{27}$ のそれぞれを 27 で割った余りを考えましょう。27 で割った余りは 0 から 26 の範囲ですから 27 種類ですが、28 個の $b_0, b_1, \ldots, b_{27}$ について 27 で割った余りを計算するわけですから、「26 個の巣箱に 27 羽の鳩が入るとすると必ず 2 羽以上いる巣箱がある」（このことを数学では鳩ノ巣原理といいます）ことから、余りが同じものがあることが分かります。$b_0, b_1, \ldots, b_{27}$ のうちのどれかとどれかですから、b_i と b_j としましょう。$0 \leq i < j \leq 27$ です。同じになる余りを r と書くと、この事実は、b_i を 27 で割った商を p、b_j を 27 で割った商を q とすると、$b_i = 27p + r, b_j = 27q + r$ と書くことができます。さて、$i < j$ としてありますから、大きい数から小さい数を引き、$b_j - b_i$ を計算すると、$b_j - b_i = (27q + r) - (27p + r) = 27q - 27p = 27(q - p)$ となります。これは、この $b_j - b_i$ は 27 の倍数であることを意味しています。「$b_j - b_i$ が 27 の倍数となる i, j が $0 \leq i < j \leq 27$ の範囲に必ずあること」を示したかったのですが、そのような i と j を見つけることができたことになります。つまり、ここで選んだ i と j について、$i + 1$ 時間目から j 時間目までにちょうど 27 問考えたことが分かりました。

   理解できましたか。 ■

Quiz 5

Division: **ID#:** **Name:**

J 国大使夫妻を含め 50 カ国の大使夫妻があるパーティーに出席した（合計 100 人）。握手の後 J 国大使は夫を含めた各人に何人と握手したかを尋ねると、どの人も異なる人数を答えた。ただしどの人も自分の配偶者とは握手をしなかった。以下のことについて説明せよ。

1. 偶数人と握手した人は必ず偶数人いる。

2. 誰とも握手しなかった人、丁度 1 人と握手した人、丁度 97 人と握手した人、丁度 98 人と握手した人がいる。

3. 丁度 1 人と握手した人の配偶者は丁度 97 人と握手した人である。

Message 欄（裏にもどうぞ）： (1) 結婚について、家庭について、子供について。About marriage, family and children. (2) この授業について。要望・改善点など。About this course; requests and suggestions for improvement.（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 5

J 国大使夫妻を含め 50 カ国の大使夫妻があるパーティーに出席した（合計 100 人）。握手の後 J 国大使は夫を含めた各人に何人と握手したかを尋ねると、どの人も異なる人数を答えた。ただしどの人も自分の配偶者とは握手をしなかった。以下のことについて説明せよ。

1. 偶数人と握手した人は必ず偶数人いる。

   解：パーティー出席者を頂点、握手した人同志の組を辺であらわすと、頂点の数が 100 のグラフができる。この場合、各頂点の次数はその人が何回握手したかに対応する。Theorem 5.1 (ii) より、奇数次数の頂点の数は偶数であるので、奇数回握手した人は偶数人存在する。ところが全体で 100 人で偶数なので、偶数回握手した人は 100（偶数）人から奇数回握手した偶数人を引いた、偶数人であることがわかる。偶数引く偶数は偶数であることに注意せよ。 ■

2. 誰とも握手しなかった人、丁度 1 人と握手した人、丁度 97 人と握手した人、丁度 98 人と握手した人がいる。

   解：握手の最小数は 0 で最大数は、本人と配偶者を除いた全員と握手する場合なので、98 である。つまり 0 から 98 の 99 種類可能性がある。いま、J 国大使以外の 99 人はすべて違う回数握手していることがわかったのだが、握手の回数は 0 から 98 の 99 種類しかないのだから、握手の回数が異なると言うことから、それらは、0 から 98 すべての回数握手した人がいることを意味する。したがって、誰とも握手しなかった人も、丁度 1 回握手した人も、丁度 97 回握手した人も、丁度 98 回握手した人も存在する事がわかった。 ■

3. 丁度 1 人と握手した人の配偶者は丁度 97 人と握手した人である。

   解：98 回握手した人が存在するが、その人は、自分とその配偶者以外全員と握手したことになる。すると一回も握手しなかった人は 98 回握手した人の配偶者である。なぜなら、誰とも握手しなかったと言うことは、98 回握手したひととも握手しなかったことになるが、そのような人は 98 回握手した人とその配偶者だけだからである。

   さて、97 回握手した人が存在するが、その人は、自分とその配偶者と誰とも握手しなかった人以外全員と握手したことになる。すると丁度一回握手した人は、98 回握手した人とは握手をしているので（なぜなら 98 回握手した人と握手しなかったのは上にも述べたように、自分自身、つまり 98 回握手した人と、一回も握手しなかった人だからである）この人は、97 回握手した人とは握手していないことになる。97 回握手した人が握手しなかった人は、97 回握手した本人と一回も握手しなかった人で、98 回握手した人の配偶者と判明した人と、その配偶者だけだから、丁度一回握手した人の配偶者は、97 回握手した人であることが判明する。 ■

Quiz 6

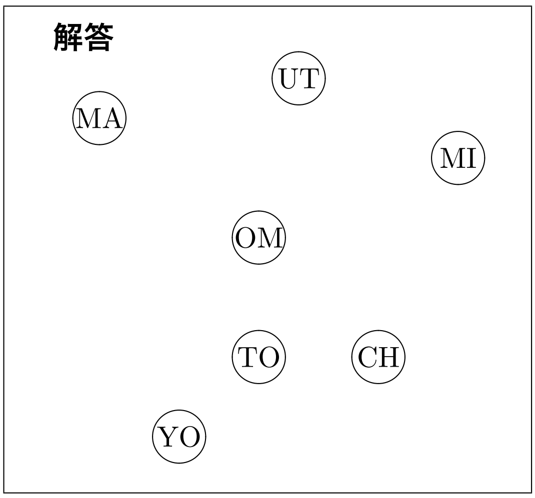
Division: **ID#:** **Name:**

1. 頂点数が 8 の木 (tree) について次の問に答えよ。

   (a) 6 頂点の次数が $4, 2, 2, 1, 1, 1$ であるとき残りの <u>二つ</u> の頂点の次数はそれぞれいくつか。

   (b) 各頂点の次数が $1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4$ であるもので異なる（同型でない）ものが 3 種類ある。これらを図示せよ。

2. CH, MA, MI, OM, TO, UT, YO の 7 地点を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで総延長距離最短のものを作りたい。接続可能な 2 地点間の距離は下の表のように与えられているとき、そのネットワークを下の図に示せ。



地点間の距離 (Table of Distances)

	CH	MA	MI	OM	TO	UT	YO
CH	-	130	101	60	38	117	65
MA	130	-	137	78	101	91	128
MI	101	137	-	105	108	64	138
OM	60	78	105	-	30	82	53
TO	38	101	108	30	-	105	30
UT	117	91	64	82	105	-	134
YO	65	128	138	53	30	134	-

単位 km

Message 欄（裏にもどうぞ）: 国際人（World Citizen）とは。ICU のそして自分の「国際性」にとって必要なこと。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 6

1. 頂点数が 8 の木 (tree) について次の問に答えよ。

   (a) 6 頂点の次数が $4, 2, 2, 1, 1, 1$ であるとき残りの <u>二つ</u> の頂点の次数はそれぞれいくつか。

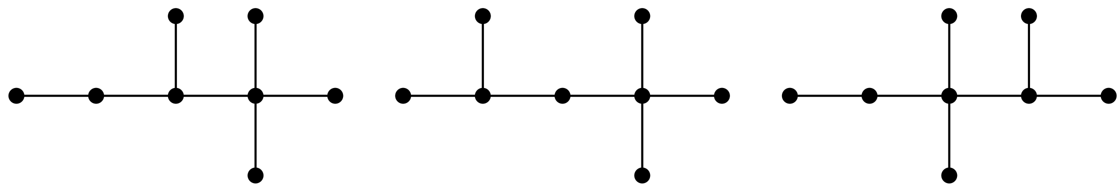
   解：頂点の個数 $v = 8$ の木の辺の数は $e = v - 1 = 7$。したがって、次数の総和は、$2e = 14$. のこりの次数を x と y とすると、

   $$14 = 2e = x + y + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = x + y + 11.$$

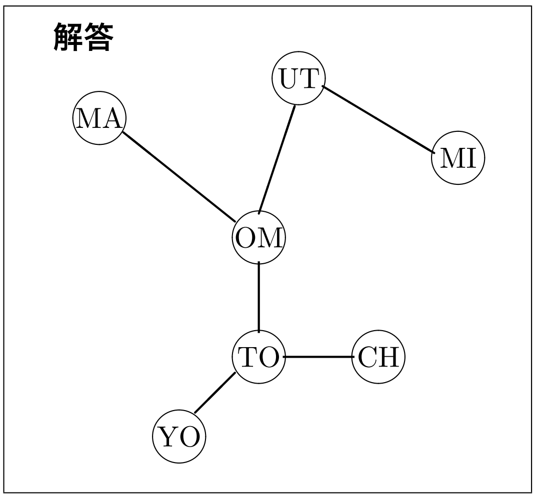
   これより $x + y = 3$. 木は連結だから、$x > 0$, $y > 0$ だから x, y は 1 と 2 であることが分かる。従って、残りの二つの頂点の次数は 1 と 2. ■

   (b) 各頂点の次数が $1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4$ であるもので異なる（同型でない）ものが 3 種類ある。これらを図示せよ。

   解：次数が 2, 3, 4 の点の並び方は、$2 - 3 - 4$, $3 - 2 - 4$, $2 - 4 - 3$ だから次の何れかになる。



2. CH, MA, MI, OM, TO, UT, YO の 7 地点を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで総延長距離最短のものを作りたい。接続可能な 2 地点間の距離は下の表のように与えられているとき、そのネットワークを下の図に示せ。



地点間の距離 (Table of Distances)

	CH	MA	MI	OM	TO	UT	YO
CH	-	130	101	60	38	117	65
MA	130	-	137	78	101	91	128
MI	101	137	-	105	108	64	138
OM	60	78	105	-	30	82	53
TO	38	101	108	30	-	105	30
UT	117	91	64	82	105	-	134
YO	65	128	138	53	30	134	-

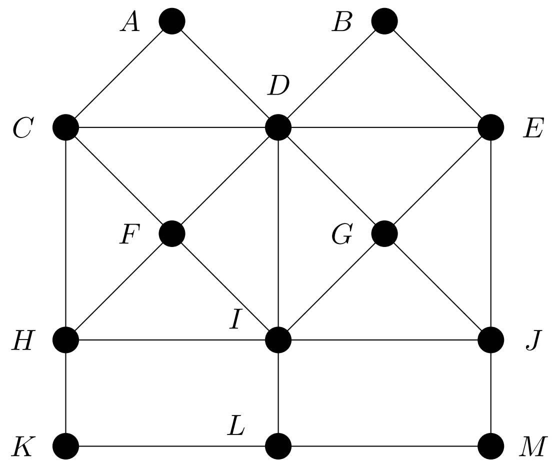
単位 km

e_1: OM—TO, e_2: TO—YO, e_3: CH—TO, e_4: MI—UT, e_5: MA—OM, e_6: OM—UT.

Quiz 7

Division: **ID#:** **Name:**

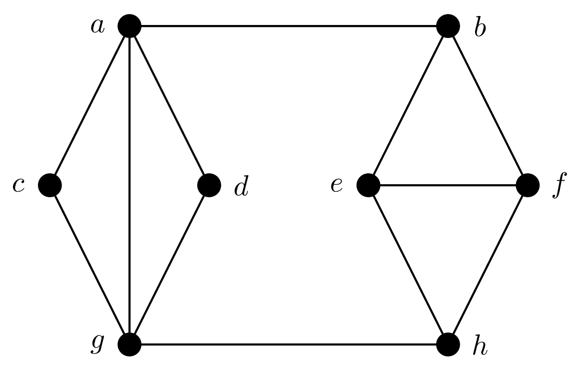
1. (a) 下のグラフは一筆書きはできるが、オイラーグラフではないことを説明せよ。



(b) 上のグラフは辺を一つ付け加えるとオイラーグラフになる。どの頂点をどの頂点を辺で結べばよいか。頂点の記号で答えよ。

(c) 上のグラフはハミルトングラフであることをハミルトン閉路を頂点の記号で示すことにより示せ。ただし、頂点 A から始めること。

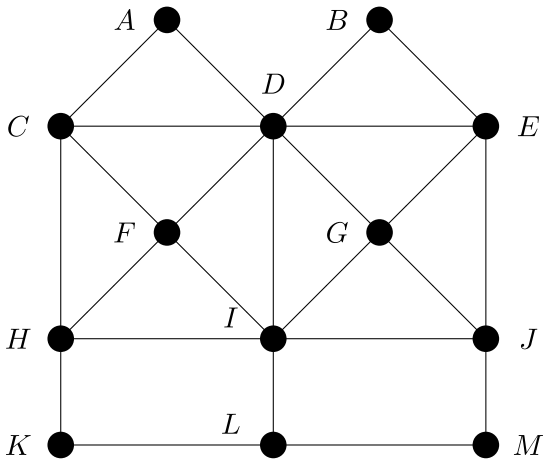
2. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。



Message 欄（裏にもどうぞ）: 聖書を読んだことがありますか。キリスト教について、ICU の「C」について。(「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。)

Solutions to Quiz 7

1. (a) 下のグラフは一筆書きはできるが、オイラーグラフではないことを説明せよ。



解：左のグラフは連結でありその中で奇数次数の頂点は D と L の二点のみである。(D の次数は 7 で L の次数は 3 である。)
Theorem 7.1 より、連結なグラフがオイラーグラフである必要十分条件は、すべての頂点の次数が偶数であることなので、このグラフはオイラーグラフではない。
また、Corollary 7.2 より連結で奇数次数の次数が 2 以下であることと一筆書きできることは同値であるので、このグラフは一筆書きできる。
注. 一筆書きできることは、実際にその経路をしめしても良いが、オイラーグラフでないことには、Theorem 7.1 が必要である。

(b) 上のグラフは辺を一つ付け加えるとオイラーグラフになる。どの頂点をどの頂点を辺で結べばよいか。頂点の記号で答えよ。
解：D と L。これによりすべての頂点の次数が偶数になり、Theorem 7.1 よりオイラーグラフとなる。

(c) 上のグラフはハミルトングラフであることをハミルトン閉路を頂点の記号で示すことにより示せ。ただし、頂点 A から始めること。
解：

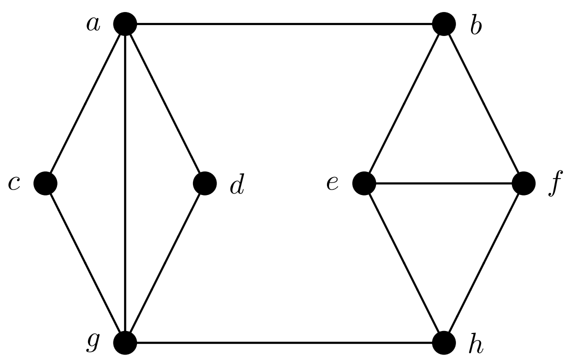
$$A - C - F - H - K - L - M - J - I - G - E - B - D - A.$$

またはこれの反対まわりまたは

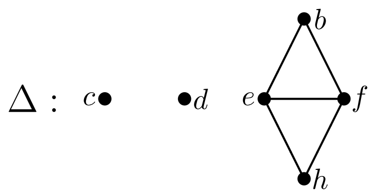
$$A - C - F - I - H - K - L - M - J - G - E - B - D - A.$$

かその反対回り。

2. 下のグラフはハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。



解：$S = \{a, g\}$ とし、Δ を S を取り除いたグラフとすると、$\{c\}$, $\{d\}$, $\{b, e, f, h\}$ の三つの連結成分に分かれるので、$\omega(\Delta) = 3 > 2 = |S|$ である。背理法で示す。このグラフがハミルトングラフだと仮定すると、Theorem 7.3 より $\omega(\Delta) \leq |S|$ が成り立たなければならない。これは $\omega(\Delta) = 3 > 2 = |S|$ に矛盾する。したがって、このグラフはハミルトングラフではない。



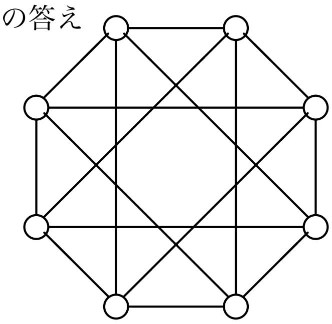
Quiz 8

Division: **ID#:** **Name:**

1. 下のグラフ Γ は 平面的グラフではないことを示したい。
   (a) Γ は二部グラフであることを、下の図の幾つかの頂点を黒く塗りつぶすことで示せ。
   (b) Γ が平面グラフに描けたと仮定したときの面の数 f を求めよ。(Show Work!)

   (c) Γ は平面的グラフではないことを説明して下さい。背理法を使うときは仮定を明確にし、Theorem や Proposition をつかうときは、それを明示すること。

(a) の答え



2. ある連結な平面グラフは、3-正則（各頂点の次数が 3）で、各面はすべて 4 辺形か 6 辺形である。このグラフの 4 辺形の総数は 6 であることを示して下さい。

Message 欄（裏にもどうぞ）：(1) 日本・世界の教育について。(2) ICU の教育について。特に改善点について。

Solutions to Quiz 8

1. 下のグラフ Γ は 平面的グラフではないことを示したい。

   (a) Γ は二部グラフであることを、下の図の幾つかの頂点を黒く塗りつぶすことで示せ。

   注. 二部グラフは、頂点が黒・白に塗り分けられ、黒同志、白同志は辺で結ばれていないグラフである。

   (b) Γ が平面グラフに描けたと仮定したときの面の数 f を求めよ。(Show Work!)

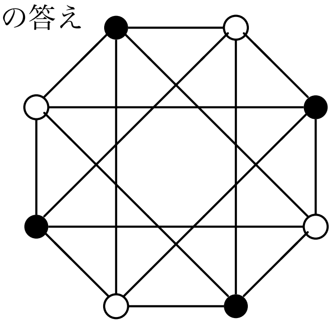
   解： 頂点の数 v は 8、辺の数 e は 16 である。このグラフは連結であるから、平面グラフに描けたとすると、オイラーの公式 (Theorem 8.1) より

   $$f = 2 - v + e = 2 - 8 + 16 = 10.$$

   従ってこのときの面の数は 10 である。 ■

   (c) Γ は平面的グラフではないことを説明して下さい。背理法を使うときは仮定を明確にし、Theorem や Proposition をつかうときは、それを明示すること。

(a) の答え



解： 背理法により示す。そこで平面的グラフであるとする。このとき、Γ を平面グラフに描いたものは (b) より面を 10 個持つ。10 個の面を囲む辺の数（境界となる辺の数）をそれぞれ、$n_1, n_2, \ldots, n_{10}$ とする。(a) で示したように、このグラフは二部グラフなので、閉路の長さは、常に偶数だから $n_1 \geq 4, n_2 \geq 4, \ldots, n_{10} \geq 4$ である。ここで、Proposiiton 8.2 (ii) を用いると、辺の数 e は 16 だったから

$$32 = 2e = n_1 + n_2 + \cdots + n_{10} \geq 4 \cdot 10 = 40.$$

これは矛盾である、従って Γ は平面グラフではない。 ■

2. ある連結な平面グラフは、3-正則（各頂点の次数が 3）で、各面はすべて 4 辺形か 6 辺形である。このグラフの 4 辺形の総数は 6 であることを示して下さい。

   解： 頂点の数を v とする。3-正則だから、Proposition 8.2 (i) の後半より $3v = 2e$ となり、これより、$e = 3v/2$ を得る。4 辺形の数を x とする。面の総数を f とすると、6 辺形の数は $f - x$ である。従って、Proposition 8.2 (ii) によって

   $$4x + 6(f - x) = 2e = 3v$$

   を得る。したがって、$6f - 2x = 3v$ となり、$f = x/3 + v/2$ を得る。ここでオイラーの公式 (Theorem 8.1) を用いると、

   $$2 = v - e + f = v - \frac{3v}{2} + \frac{x}{3} + \frac{v}{2} = \frac{x}{3}.$$

   これより $x = 6$ となり、4 辺形の数は 6 であることがわかった。 ■

   注. すべて e で統一して、$v = 2e/3$, $4x + 6(f - x) = 2e$ から $f = e/3 + x/3$ として、

   $$2 = v - e + f = \frac{2e}{3} - e + \frac{e}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3}$$

   から $x = 6$ としても良い。