Quiz 1

Division: **ID#:** **Name:**

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つことを下の真理表を完成することによって示せ。(Let p, q and r be propositions. Complete the truth table below and show the following.)
$$(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge r) \equiv p \Rightarrow r.$$

p	q	r	$((p \quad \vee \quad (q \quad \wedge \quad r)) \quad \Rightarrow \quad ((p \quad \vee \quad q) \quad \wedge \quad r)$	$p \quad \Rightarrow \quad r$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

2. 二つの論理式 x と y が論理同値 $(x \equiv y)$ ならば常に $x \Rightarrow y$ はトートロジー（すなわち x, y に含まれる命題 p, q, r などの真理値によらず常に真）であることを説明せよ。(Show that if two statements x and y are equipollent (*Ronri-douchi*) then $x \Rightarrow y$ is tautology, i.e., truth value is always true.)

3. 命題 p, q の論理式 x と y で x と y は論理同値ではないが、$x \Rightarrow y$ はトートロジーであるものの例をあげよ。(Let x and y be statements involving propositions p and q. Give an example that $x \not\equiv y$, while $x \Rightarrow y$ is a tautology.)

4. $((p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge r)) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ はトートロジーではないことを説明せよ。(Show that $((p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge r)) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ is not a tautology.)

Message 欄：将来の夢、25 年後の自分について、世界について。What is your dream? Describe your vision of yourself and the world 25 years from now.（「HP 掲載不可」は明記の事。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 1

1. p, q, r を命題とする。このとき、次の式が成り立つことを下の真理表を完成することによって示せ。(Let p, q and r be propositions. Complete the truth table below and show the following.)

$$(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge r) \equiv p \Rightarrow r.$$

p	q	r	$[(p$	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r)]$	$\Rightarrow$	$[(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$r]$	p	$\Rightarrow$	r
T	T	T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F	T	T	T	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F
T	F	T	T	T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F	T	T	F	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	F	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F
F	T	T	F	T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F	F	F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F
F	F	T	F	F	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	T
F	F	F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F

2. 二つの論理式 x と y が論理同値 $(x \equiv y)$ ならば常に $x \Rightarrow y$ はトートロジー（すなわち x, y に含まれる命題 p, q, r などの真理値によらず常に真）であることを説明せよ。(Show that if two statements x and y are equipollent (*Ronri-douchi*) then $x \Rightarrow y$ is tautology, i.e., truth value is always true.)

   解：$x \equiv y$ ということは、x が T のとき y も T, x が F のとき、y も F である。一方、$x \Rightarrow y$ が F となるのは、x が T で y が F の時であるから、$x \Rightarrow y$ は F にはならず、常に T である。したがって、$x \Rightarrow y$ はトートロジーである。 ■

3. 命題 p, q の論理式 x と y で x と y は論理同値ではないが、$x \Rightarrow y$ はトートロジーであるものの例をあげよ。(Let x and y be statements involving propositions p and q. Give an example that $x \not\equiv y$, while $x \Rightarrow y$ is a tautology.)

   解：$x = p$, $y = p \vee q$ とすれば、$x \Rightarrow y$ は トートロジーしかし、p が F で q が T のとき x は F であるが、y は T であるから、$x \not\equiv y$ である。 ■

   $x = p \wedge q$, $y = p$ などでも良い。

4. $((p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge r)) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ はトートロジーではないことを説明せよ。(Show that $((p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge r)) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ is not a tautology.)

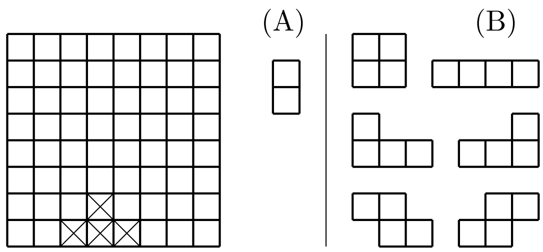
   解：1 で示したように、$(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow ((p \vee q) \wedge r) \equiv p \Rightarrow r$ だから、これら二つの論理式の真理値は常に等しい。よって、$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ がトートロジーではないことを示せばよい。p の真理値が F, r の真理値が T のとき、この真理値は F となる。 ■

Quiz 2

Division: **ID#:** **Name:**

1. 下のチェス盤の $\times$ ついていない 60 個のマスを、(A) の正方形 2 個の盤、(B) のような正方形 4 個の 6 種の盤で敷き詰めることを考える。これらの板は十分な数あるものとする。

   (a) (A) の板では敷き詰めることができないことを説明せよ。



   (b) (B) の種類の板では、敷き詰めることができないことを説明せよ。

2. つぎの数を求め、なぜそのようになるかを簡単に説明せよ。ただし、答えは ${}_nC_r$ (n 個の中から r 個をとる組合せの数）を用いて表せ。${}_nC_r$ の値を計算しなくてよい。

   (a) 25 個のキャンディーを一人最低 2 個はもらえるように 7 人家族で分ける分け方の種類。

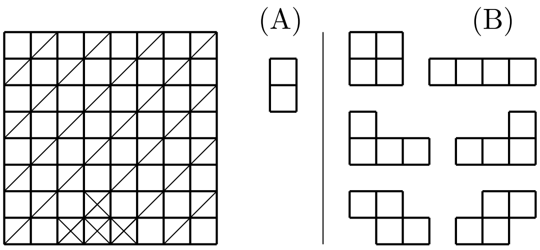
   (b) 25 個のキャンディーを 7 人家族で分ける分け方の種類。

Message 欄（裏にもどうぞ）: あなたにとって一番たいせつな（または、たいせつにしたい）もの、ことはなんですか。What is most precious to you?（「HP 掲載不可」は明記の事。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 2

1. 下のチェス盤の × ついていない 60 個のマスを、(A) の正方形 2 個の盤、(B) のような正方形 4 個の 6 種の盤で敷き詰めることを考える。これらの板は十分な数あるものとする。

   (a) (A) の板では敷き詰めることができないことを説明せよ。



解：盤に図のように斜線を引くと、斜線の入ったマスが 29, 斜線の入っていないマスが 31 ある。今、(A) の板を縦か横に置くと、斜線の入ったマスが 1 個、斜線の入らないマスが 1 個覆われる。したがって、敷き詰められたとすると、覆われるマスで斜線の入ったものの数と、斜線の入ってないものの数は同数のハズである。上の盤は、斜線の入ったマスと、斜線の入っていないマスの数が異なるので、敷き詰められることはない。

（ポイント (1) (A) で覆うと必ず 斜線のところ 1 マスと、斜線のないところ 1 マスが覆われる。(2) (A) の板何個で覆っても、重ならない限り、覆われる、斜線のあるマスと、斜線のないマスは同数である。(3) 上の盤の斜線のあるマスと斜線のないマスの数は同数ではない。これら三つのポイントが肝心です。）

   (b) (B) の種類の板では、敷き詰めることができないことを説明せよ。

解：(B) の種類の板で上の盤が、敷き詰められたとする。(B) のどの板も、(A) の板二枚で敷き詰めることができるので、上の盤は (A) の板での敷き詰められることになる。しかし、(a) よりそれは不可能だから、敷き詰められない。

(a) と同じように証明することも可能です。すなわち、上のポイントになぞらえると、(1) (B) で覆うとどの板を用いたとしても、必ず 斜線のところ 2 マスと、斜線のないところ 2 マスが覆われる。(2) (B) の板どれを何個で覆っても、重ならない限り、覆われる、斜線のあるマスと、斜線のないマスは同数である。(3) 上の盤の斜線のあるマスと斜線のないマスの数は同数ではない。したがって、板が重ならずに敷き詰めることはできない。

2. つぎの数を求め、なぜそのようになるかを簡単に説明せよ。ただし、答えは ${}_nC_r$ (n 個の中から r 個をとる組合せの数）を用いて表せ。 ${}_nC_r$ の値を計算しなくてよい。

   (a) 25 個のキャンディーを一人最低 2 個はもらえるように 7 人家族で分ける分け方の種類。

解：${}_{17}C_6$: まず一つずつ配ります。すると、18 個のこります。残りを、一人最低 1 個はもらえるように 7 人家族で分ける分け方が分かれば良いことになります。それには、18 個を一列にならべると、間が 17 個。その間に、6 本の仕切り線を入れれば、7 人に配ることができるので、17 個から 6 個とる組合せの数と同じであることが分かります。

   (b) 25 個のキャンディーを 7 人家族で分ける分け方の種類。

解：${}_{31}C_6$:最初に 32 個のキャンディーがあり、いま 一人 1 個ずつ配り、25 個残った状態だと考えれば、32 個のキャンディーを一人最低 1 個はもらえるように 7 人家族で分ける分け方と同じですから、上と同じ考え方で、32 個を一列に並べ、31 個の間のうち、6 個にしきりを入れればよいことになります。したがって 31 個から 6 個とる組み合わせの数と同じであることが分かります。

Quiz 3

Division: **ID#:** **Name:**

大きさの異なる 6 枚の中央に穴のあいた円盤と、それらの穴を通すことができる 3 本の柱 A, B, C があり、今、すべての円盤が A の柱に下から大きい順に並べるように通してある。1 回につき 1 枚ずつ円盤を移動させ、下の [ルール] を守って、$2^6 - 1 = 63$ 回の移動ですべての円盤を B の柱に移動させたい。[ルール] 円盤は移動したとき必ず A, B, C のどれかの柱に通し、また、円盤の上には、より小さな円盤しか載せられない。

1. 円盤の数を n (n は自然数) とし $2^n - 1$ の移動でできることを数学的帰納法で示す。このとき証明すべき命題 $p(n)$ を記せ。

2. 前問の $p(n)$ がすべての自然数 n について真であることを示せ。

3. 円盤を小さい方から $1, 2, \ldots, 6$ とし、今それぞれの柱に下から順に、6 が、A の柱に、4,3,2,1 が B の柱に、5 が C の柱に通してあるとする。最短手順で完成するには、次にどれをどこに動かせばよいか。

Message 欄（裏にもどうぞ）: 最近のことで、とても嬉しかった（感謝している）こと、悲しかったこと、怒っていること。(Anything that made you rejoice, sad or angry, or you are thankful of recently?)（「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write “Do Not Post.”）

Solutions to Quiz 3

1. 円盤の数を n (n は自然数) とし $2^n - 1$ の移動でできることを数学的帰納法で示す。このとき証明すべき命題 $p(n)$ を記せ。

   解：$p(n)$: 大きさの異なる n 枚の中央に穴のあいた円盤と、それらの穴を通すことができる 3 本の柱があり、すべての円盤が 3 本の柱の内の一本に下から大きい順に並べるように通してあれば、1 回につき 1 枚ずつ円盤を移動させ、上の [ルール] を守って、$2^n - 1$ 回の移動ですべての円盤を他の二本の柱のいずれにも移動させることができる。ただし、この n 枚以外にも、円盤がこれらの柱に通してあるかも知れないが、それらは、これら n 枚より大きく、かつ、下から大きい順に並べるように通してあるものとする。

2. 前問の $p(n)$ がすべての自然数 n について真であることを示せ。

   解：$n = 1$ のときは、その一枚を、他の柱に 1 回 ($2^1 - 1 = 1$) の移動できるから、$p(1)$ は真である。

   自然数 k について命題 $p(k)$ は真であるとする。このとき $p(k+1)$ が真であることを示す。

   $k+1$ がすべて 1 本の柱にあるので、小さい k 枚も、3 本のうちの一本にあり、それ以外は、すべてこれら k 枚より大きいので、$p(k)$ が真であるとの仮定から $2^k - 1$ 回の移動で、これら k 枚を $k+1$ 枚を移動する先の柱とは異なる柱に移動することができる。これを第一ステップとよぶことにする。

   $k+1$ 枚目の上には、一枚も円盤がなく、移動させたい柱にも、この円盤より小さな円盤はないから、$k+1$ 枚目を目的の柱に移動することができる。これを第二ステップとよぶことにする。

   このとき、$k+1$ 枚すべてを移動したい柱に $k+1$ 枚目の円盤があり、もう一つの柱に k 枚が下から大きい順に通してある。したがって、$p(k)$ が真であることから、これら k 枚を $k+1$ 番目の円盤の上に $2^k - 1$ 回の移動で、移動することができる。これを第三ステップとよぶことにする。

   これらに要する移動回数の合計を考える。第一ステップで、$2^k - 1$ 回、$k+1$ 枚目を移動する第二ステップで 1 回、再度 k 枚を移動させる第三ステップで $2^k - 1$ 回の移動が必要なので、合計で、$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ の移動で、完成したことになる。したがって、$p(k+1)$ が真であることが示された。数学的帰納法により、すべての自然数 n について、$p(n)$ は真である。 ■

3. 円盤を小さい方から $1, 2, \ldots, 6$ とし、今それぞれの柱に下から順に、6 が、A の柱に、4,3,2,1 が B の柱に、5 が C の柱に通してあるとする。最短手順で完成するには、次にどれをどこに動かせばよいか。

   解：「1 を A に移動する」

   （考え方）まだ 6 が A にあるので、6 を B に移動したい。そのためには、1,2,3,4,5 を C に載せたい。5 はすでに C にあるから、4,3,2,1 を C に移動したい。つまり、5, 6 は無視して、B にある 1,2,3,4 を C に移動することを考えればよい。それには、1,2,3 を一旦 A に移動したい。3 を A に移動するためには、1,2 を C に移動する、そのためには、1 をまず、A に移動することになる。

   （すべての移動）[1,C], [2,B], [1,B], [3,C],[1,A],[2,C],[1,C],[4,B],[1,B],[2,A],[1,A],[3,B],[1,C],[2,B],[1,B],[5,C]（コレが問題の状況）[1,A],[2,C],[1,C],[3,A],[1,B],[2,A],[1,A],[4,C],[1,C],[2,B],[1,B],[3,C],[1,A],[2,C],[1,C]（ここで 6 が移動できます）[6,B],[1,B],[2,A],[1,A],[3,B],[1,C],[2,B],[1,B],[4,A],[1,A],[2,C],[1,C],[3,A],[1,B],[2,A],[1,A],[5,B],[1,C],[2,B],[1,B],[3,C],[1,A],[2,C],[1,C],[4,B],[1,B],[2,A],[1,A],[3,B],[1,C],[2,B],[1,B]（完成です）

   [i,X] は i 番目の円盤を柱 X に移動させることを意味することとします。

Quiz 4

Division: **ID#:** **Name:**

1. 鳩ノ巣原理を用い、次の命題がいつでも正しくなるような自然数で (a), (b) においては、最大のものを、(c) においては、最小のものを$\boxed{}$ に入れよ。

   (a) 19 羽の鳩と、6 個の巣箱がある。すべての鳩がこれらの巣箱のいずれかに入れば巣箱のうちどれか一つは

   $\boxed{}$ 羽以上の鳩が同居している。

   (b) 今学期、ELP の ARW には合計で 683 人が登録しており、Section の数は全体で 31 である。(AA〜AL, BA〜BL, CA〜CG)

   $\boxed{}$ 人以上いるセクションがある。

   (c) 今学期「数学の世界」には 150 人が登録している。このうちアーツ・サイエンス学科所属の学生は 91 名である。ある学科 (AS, H, SS, NS, L, E, IS) からは

   $\boxed{}$ 人以下しか登録していない。

2. ある店では毎日最低一人アルバイトを雇っている。二人以上の時もある。昨年 290 日営業し、日給制でアルバイトにはのべ 365 日分給料を支払った。このときある期間に丁度 200 日分の給料を支払った期間があることをなるべくていねいに説明せよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）：どんなおとなが魅力的ですか。こどもの魅力は何でしょう。

Solutions to Quiz 4

1. 鳩ノ巣原理を用い、次の命題がいつでも正しくなるような自然数で (a), (b) においては、最大のものを、(c) においては、最小のものを $\boxed{}$ に入れよ。

   (a) 19 羽の鳩と、6 個の巣箱がある。すべての鳩がこれらの巣箱のいずれかに入れれば巣箱のうちどれか一つは

   $\boxed{4}$ 羽以上の鳩が同居している。

   (b) 今学期、ELP の ARW には合計で 683 人が登録しており、Section の数は全体で 31 である。(AA〜AL, BA〜BL, CA〜CG)

   $\boxed{23}$ 人以上いるセクションがある。

   (c) 今学期「数学の世界」には 150 人が登録している。このうちアーツ・サイエンス学科所属の学生は 91 名である。ある学科 (AS, H, SS, NS, L, E, IS) からは

   $\boxed{9}$ 人以下しか登録していない。

2. ある店では毎日最低一人アルバイトを雇っている。二人以上の時もある。昨年 290 日営業し、日給制でアルバイトにはのべ 365 日分給料を支払った。このときある期間に丁度 200 日分の給料を支払った期間があることをなるべくていねいに説明せよ。

   解：b_i を 第 1 営業日から第 i 営業日までの間のアルバイトの延べ人数とする。(「第 i 営業日までに b_i 日分の給料を払ったとする」としても同じ）[以下に二通りの解を書きます。]

   [1] $b_{290} = 365$ だから、$b_1, b_2, \ldots, b_{290}, b_1+200, b_2+200, \ldots, b_{290}+200$ はすべて $365+200 = 565$ 以下の自然数で、全部で $290+290 = 580$ ある。565 以下の自然数が 580 あるのだから、鳩ノ巣原理によって、重複があることがわかる。しかし、毎日最低一人アルバイトを雇っていると言うことは、

   $$b_1 < b_2 < \cdots < b_{290}$$

   となっていることを意味するから、これらは、相異なる。また、このことから、

   $$b_1 + 200 < b_2 + 200 < \cdots < b_{290} + 200$$

   だからこれらも異なる。したがって、$b_1, b_2, \ldots, b_{290}$ のうちの一つと、$b_1+200, b_2+200, \ldots, b_{290}+200$ のうちの一つが重複することになる。すなわち、$b_i = b_j + 200$ となるような i, j があることになる。$b_i - b_j = 200$ で、$b_i - b_j$ は $j+1$ 営業日から i 営業日までのアルバイトの延べ日数だから、ある期間に丁度 200 日分の給料を支払った期間があることが示された。■

   [2] $b_1, b_2 \ldots, b_{290}$ を 200 で割る。余りは、0 から 199 だから、鳩ノ巣原理によって、かならず同じ余りを持つものが存在する。これを、b_i, b_j とし、$j < i$ と仮定する。200 で割った商をそれぞれ p と q あまりを r とすると、$b_i = 200p + r$, $b_j = 200q + r$ とかける。したがって、

   $$b_i - b_j = (200p + r) - (200q + r) = 200(p - q)$$

   だから 200 の倍数である。一方、$j < i$ だったから、毎日最低一人アルバイトを雇っていると言うことから

   $$1 \leq b_i - b_j \leq 365$$

   であることがわかる（実際には、$b_j \geq 1$ ですから 364 以下であることもわかります)。すなわち $b_i - b_j$ は 365 以下の自然数で、200 の倍数だから、ちょうど 200 となる。$b_i - b_j = 200$ で、$b_i - b_j$ は $j+1$ 営業日から i 営業日までのアルバイトの延べ日数だから、ある期間に丁度 200 日分の給料を支払った期間があることが示された。■

Quiz 5

Division: **ID#:** **Name:**

1. A さんはあるパーティーに参加し、そこには A さんを含め、全員で 12 人の人の出席者がいた。パーティーの最後に A さんが（自分自身以外全員の）参加者に握手した人数を聞くと、（その人達は）全員が一人とは握手していることと、握手した人数が違うことが判明した。
   (a) このパーティ参加者の中に、ちょうど 1 人と握手した人も、ちょうど 11 人と握手した人も最低一人はいることをていねいに説明せよ。

   (b) このパーティ参加者の中に、だれとも握手していない人は一人もおらず、ちょうど 11 人と握手した人はちょうど一人であることをていねいに説明せよ。

   (c) A さんは何人の人と握手したか。（答えだけでよい。）

2. ある盤 B には、ナイトをすべてのマスにおいたとき、一斉に動かすことはできないことが分かっている。この時、この盤 B のある箇所からスタートしてナイトがすべてのマスをちょうど一回ずつまわってスタート地点にもどることはできないことをていねいに説明せよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）: (1) 結婚について、家庭について、子供について。About marriage, family and children. (2) この授業について。要望・改善点など。About this course; requests and suggestions for improvement.（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。If you wish, write "Do Not Post."）

Solutions to Quiz 5

1. A さんはあるパーティーに参加し、そこには A さんを含め、全員で 12 人の人の出席者がいた。パーティーの最後に A さんが（自分自身以外全員の）参加者に握手した人数を聞くと、（その人達は）全員が一人とは握手していることと、握手した人数が違うことが判明した。

   (a) このパーティ参加者の中に、ちょうど 1 人と握手した人も、ちょうど 11 人と握手した人も最低一人はいることをていねいに説明せよ。

   解：A さんが握手した人数を聞いた参加者は、自分以外全員なので 11 人。この 11 人は最低一人とは握手しているので、握手の人数の可能性は、最低で 1 人、最高で 11 人の 11 種類。A さんが聞いた 11 人は握手した人数が異なるので、これら 11 人の人たちは、丁度 1 人と握手した人から丁度 11 人と握手した人まですべてひとりずつである。したがって、ちょうど 1 人と握手した人も、ちょうど 11 人と握手したした人も最低一人はいる。 ■

   (b) このパーティ参加者の中に、だれとも握手していない人は一人もおらず、ちょうど 11 人と握手した人はちょうど一人であることをていねいに説明せよ。

   解：前問からちょうど 11 人と握手した人も最低一人はいることが分かっている。この人は、自分以外の全員と握手しているので、だれとも握手していない人は一人もいない。また、ちょうど 1 人と握手した人も最低一人はいることがわかっている。この人は、11 人と握手をした上記の人とは握手しているが、それ以外の人とは握手していないわけだから、11 人と握手した人が二人いることはありえない。したがって、ちょうど 11 人と握手した人もちょうど一人であることがわかる。

   (c) A さんは何人の人と握手したか。（答えだけでよい。）

   解：6 人。11 人と握手した人は全員と握手しているので必ず A さんとも握手している。1 人と握手している人は、この 11 人と握手している人とのみ握手している。同様にして考察することにより、A さんは、11 人、10 人、9 人、8 人、7 人、6 人の人と握手したひとと握手し、1 人、2 人、3 人、4 人、5 人の人と握手した人とは握手していないことがわかるので、6 人となる。 ■

2. ある盤 B には、ナイトをすべてのマスにおいたとき、一斉に動かすことはできないことが分かっている。この時、この盤 B のある箇所からスタートしてナイトがすべてのマスをちょうど一回ずつまわってスタート地点にもどることはできないことをていねいに説明せよ。

   解：この対偶を考えると、ある箇所からスタートしてナイトがすべてのマスをちょうど一回ずつまわってスタート地点にもどることができれば、ナイトをすべてのマスにおいたとき、一斉に動かすことができることを示せばよいことがわかる。ある場所から、すべてのマスをちょうど一回ずつまわってスタート地点にもどる周回路のマスに 1 から n まで番号をつける。このとき、番号 1 のマスから番号 2 のマス、番号 2 のマスから番号 3 のマス ... とナイトは移動することができ、番号 n のマスからは 番号 1 のマスに移動することができる。そこで、すべてのマスにおいたナイトについては、この番号づけで、次の番号、すなわち、第 i 番目のマスにいるナイトは第 $i+1$ 番目のマスに移動することにし 第 n マス目のナイトは第 1 番目のマス目に移動することにすれば、一斉に移動できる。これで最初の主張を示すことができた。 ■

Quiz 6

Division: **ID#:** **Name:**

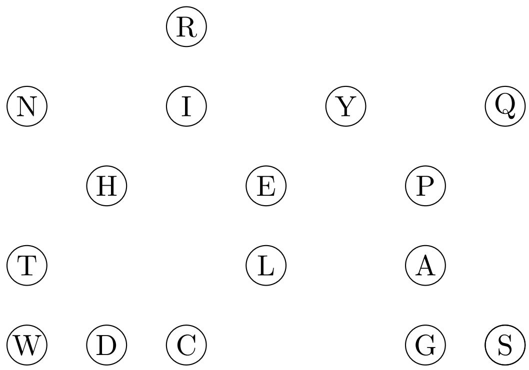
1. 頂点数が 8 の木 (tree) について次の問に答えよ。

   (a) 7 頂点の次数が $1, 1, 1, 1, 1, 2, 3$ であるときもう一つの頂点の次数はいくつか。

   (b) 各頂点の次数が $1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$ であるもので異なる（同型でない）ものが 5 種類ある。これらを図示せよ。

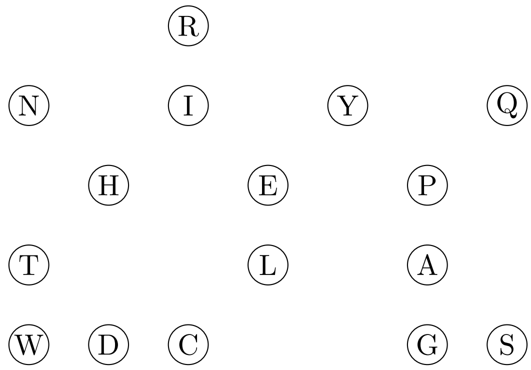
2. A, C, D, E, G, H, I, L, N, P, Q, R, S, T, W, Y の 16 地点を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。接続可能な 2 地点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、そのネットワークを下の図に示せ。また、費用の合計はいくらか。AG = AP = CD = DW = EL = GS = IR = 1, AL = CL = DH = EH = EI = EP = EY = HI = HN = HT = IN = IY = NT = PQ = PY = QY = 2, CG = CH = NR = 3.（単位は百万円）

解答



費用の合計： 百万円

練習用



Message 欄（裏にもどうぞ）：国際人（World Citizen）とは。ICU のそして自分の「国際性」にとって必要なこと。（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。）

Solutions to Quiz 6

1. 頂点数が 8 の木 (tree) について次の問に答えよ。

   (a) 7 頂点の次数が $1, 1, 1, 1, 1, 2, 3$ であるときもう一つの頂点の次数はいくつか。
   解：木なので辺の本数 $e = v - 1 = 7$。次数の総数は $2e$ なので、未知の頂点の次数を x とすると

   $$14 = 2e = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + x = 10 + x,\ x = 4$$

   したがって、次数は 4。Theorem 5.1 (i) と Theorem 6.1 を用いた。 ■

   (b) 各頂点の次数が $1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$ であるもので異なる（同型でない）ものが 5 種類ある。これらを図示せよ。
   解：

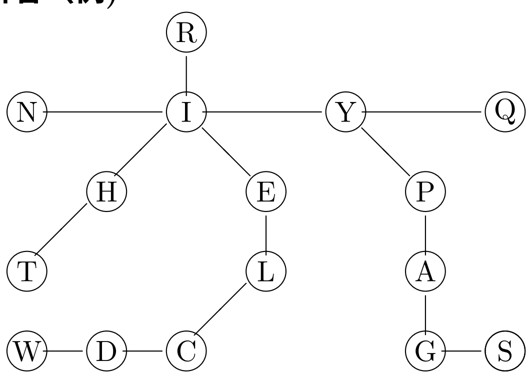
$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & - & 3 & - & 3 & - & 2 & - & 2 & - & 1 \\ & & | & & | & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccc} 1 & - & 3 & - & 2 & - & 2 & - & 3 & - & 1 \\ & & | & & & & & & | & & \\ & & 1 & & & & & & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & - & 3 & - & 2 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \\ & & | & & & & | & & & & \\ & & 1 & & & & 1 & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccc} 1 & - & 2 & - & 3 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \\ & & & & | & & | & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & - & 3 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \\ & & | & & | & & & & \\ & & 1 & & 2 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ & & & & 1 & & & & \end{array}$$

2. A, C, D, E, G, H, I, L, N, P, Q, R, S, T, W, Y の 16 地点を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。接続可能な 2 地点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、そのネットワークを下の図に示せ。また、費用の合計はいくらか。AG = AP = CD = DW = EL = GS = IR = 1, AL = CL = DH = EH = EI = EP = EY = HI = HN = HT = IN = IY = NT = PQ = PY = QY = 2, CG = CH = NR = 3.（単位は百万円）

解答（例）



費用の合計： **23** 百万円

注：答えは 1 百万円の経路をすべて使い、3 百万円の経路は一つも使わず、あとは、2 百万円の経路を使って、全体が連結（間接的にはつながるよう）にすれば、最適木（この場合は費用の合計が一番安い連結なネットワーク）が得られます。

一般的には、これほど単純ではありません。この場合は、費用の種類が少なく、かつ、距離とあまりかけはなれた、費用設定にすると混乱があると思い、簡単なものにしました。そこで、上の条件を満たしているものは、すべて最適木となり正解です。全体で 16 地点であることは、問題文にありますから、木の辺が頂点の個数引く 1 であることを考えれば、辺は 15 となります。

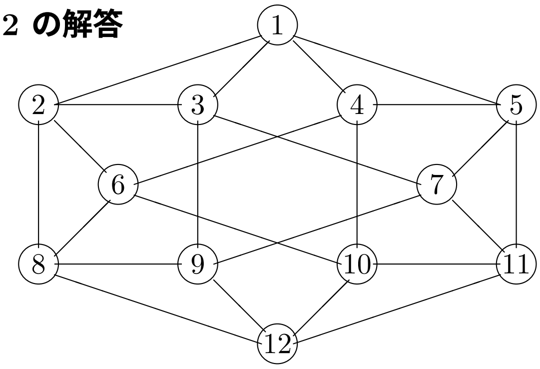
Quiz 7

Division: **ID#:** **Name:**

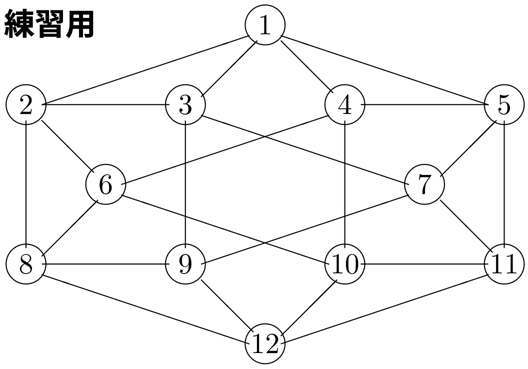
1. 下のグラフはオイラーグラフであることを、そのオイラー閉路の経路を順に番号で示すことにより示せ。

   オイラー閉路：

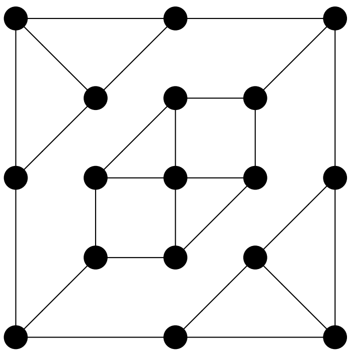
2 の解答



練習用



2. 上のグラフはハミルトングラフであることを、そのハミルトン閉路を太くしてグラフに書き込むことにより示せ。
3. 下のグラフはオイラーグラフではないことを、説明せよ。



4. 上のグラフはハミルトングラフではないことを、説明せよ。

Message 欄（裏にもどうぞ）: 聖書を読んだことがありますか。キリスト教について、ICU の「C」について。（「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと。）

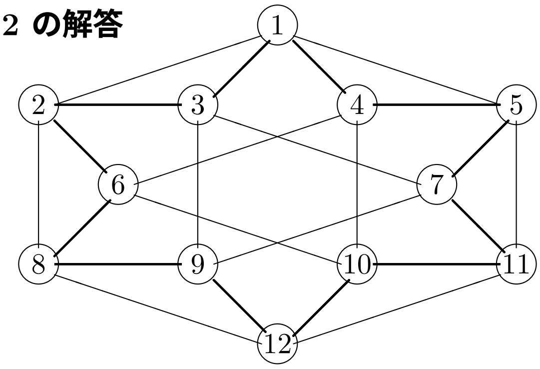
Solutions to Quiz 7

1. 下のグラフはオイラーグラフであることを、そのオイラー閉路の経路を順に番号で示すことにより示せ。

   オイラー閉路：1-2-8-12-11-5-1-3-9-7-3-2-6-4-10-6-8-9-12-10-11-7-5-4-1

   他にもたくさんあります。

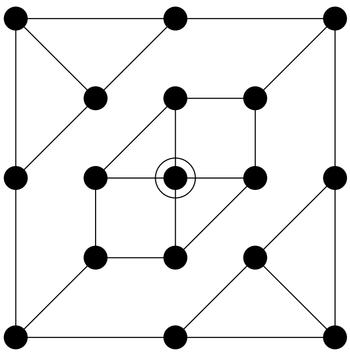
2 の解答



他にもたくさんあります。

2. 上のグラフはハミルトングラフであることを、そのハミルトン閉路を太くしてグラフに書き込むことにより示せ。

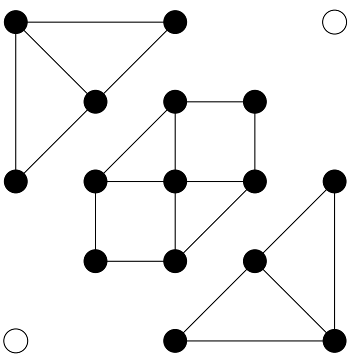
3. 下のグラフはオイラーグラフではないことを、説明せよ。



解：
Theorem 7.1 によりオイラーグラフであることの必要十分条件は、連結でかつ、各頂点の次数が偶数であることである。しかし、このグラフは、円で囲んだ頂点以外すべて次数が 3 で奇数次数であるので、オイラーグラフではない。

4. 上のグラフはハミルトングラフではないことを、説明せよ。

   解：



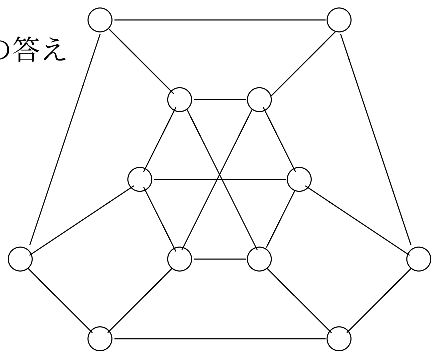
白丸であらわした二つの頂点を取り除くと、連結成分が 3 となる。すなわち、Theorem 7.3 において、S として、白丸であらわした頂点の集合ととると、この二頂点を取り除いたグラフ Δ の連結成分の数 $\omega(\Delta)$ は 3 である。もし、このグラフがハミルトングラフであれば、Theorem 7.3 により $\omega(\Delta) \leq |S|$ となるはずであるが、この場合には、$\omega(\Delta) = 3, |S| = 2$ であるので、$\omega(\Delta) \leq |S|$ は成立しない。したがって、このグラフは、ハミルトングラフではない。

Quiz 8

Division: **ID#:** **Name:**

1. 下のグラフ Γ は 平面的グラフではないことを示したい。
   (a) Γ は二部グラフであることを、下の図の幾つかの頂点を黒く塗りつぶすことで示せ。(二部グラフは頂点が 2 色で塗り分けられ、同じ色の頂点同士は隣接していないグラフ。)
   (b) Γ が平面グラフに描けたと仮定したときの、頂点の数 v, 辺の数 e, 面の数 f を求めよ。(Show Work!)
   (c) Γ は平面的グラフではないことを説明して下さい。定理や命題をつかうときは、それを明示すること。

(a) の答え



2. ある連結な平面グラフは、3-正則（各頂点の次数が 3)、かつ各面はすべて 5 辺形（5 本の辺で囲まれた面）である。このグラフの点の数 v、辺の数 e、面の数 f を求めよ。(Show work!)

Message 欄（裏にもどうぞ）: (1) 日本・世界の教育について。(2) ICU の教育について。特に改善点について。

Solutions to Quiz 8

1. 下のグラフ Γ は 平面的グラフではないことを示したい。

   (a) Γ は二部グラフであることを、下の図の幾つかの頂点を黒く塗りつぶすことで示せ。(二部グラフは頂点が 2 色で塗り分けられ、同じ色の頂点同士は隣接していないグラフ。)

   (b) Γ が平面グラフに描けたと仮定したときの、頂点の数 v, 辺の数 e, 面の数 f を求めよ。(Show Work!)

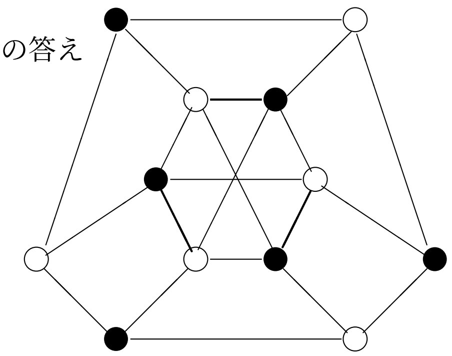
   解：グラフの頂点の数 $v = 12$、辺の数 $e = (3 \times 6 + 4 \times 6)/2 = 21$ であることは明らか。連結な平面グラフに関するオイラーの公式 Theorem 8.1 により、

   $$f = e - v + 2 = 21 - 12 + 2 = 11.$$

   したがって、$v = 12, e = 21, f = 11$ である。 ■

   (c) Γ は平面的グラフではないことを説明して下さい。定理や命題をつかうときは、それを明示すること。

(a) の答え



太くした三本の辺を除いたグラフは Franklin グラフとよばれ、そのグラフも非平面的グラフであるが、証明はもう少しアイディアが必要である。

前問より平面グラフに描けたとすると面の数は 8 である。それらの面を囲む辺の数を $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{11}$ とする。すると、Proposition 8.2 (ii) より

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{11} = 2e = 42.$$

また、辺を囲む辺は 3 本以上であるが、このグラフは (a) により二部グラフであり、長さ 3 の閉路はない。(二部グラフでは、閉路は、白、黒、交互に頂点を通るので、元に戻るためには、長さが偶数でなければならない。）したがって、$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{11}$ はすべて 4 以上である。したがって、

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{11} \geq 4 \times 11 = 44.$$

したがって、$42 \geq 44$ となり、矛盾である。よって、Γ は平面的グラフではない。 ■

中央の 6 頂点からなるグラフは $K_{3,3}$ と同型なグラフであることが、わかります。$K_{3,3}$ は非平面的ですから、そのことを用いて、このグラフが非平面的であることが分かります。Theorem 8.3 を用い $K_{3,3}$ の細分を含むからという方がより正確です。Theorem など以外は、使わないことになっていますから。

2. ある連結な平面グラフは、3-正則（各頂点の次数が 3)、かつ各面はすべて 5 辺形（5 本の辺で囲まれた面）である。このグラフの点の数 v、辺の数 e、面の数 f を求めよ。(Show work!)

   解：頂点の数を v とすると辺の数は $e = 3v/2$ である。一方、連結な平面グラフに関するオイラーの公式より

   $$f = e - v + 2 = \frac{3v}{2} - v + 2 = \frac{v}{2} + 2$$

   また、それらの面を囲む辺の数を $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_f$ とすると、仮定より、これらはすべて 5 だから Proposition 8.2 (ii) より

   $$3v = 2e = n_1 + n_2 + \cdots + n_f = 5 \cdot f = \frac{5}{2}v + 10,\ \text{したがって}\ \frac{1}{2}v = 10.$$

   これより $v = 20$ を得る。$e = 30,\ f = 12$ も得る。（正 12 面体は、この条件を満たしている。）

   ■