Practice Exam 2010*

I. 正しいものには ◯、誤っているものには × を解答欄に記入せよ。(True or False)

(1) 各点の次数がすべて偶数の連結なグラフは、ハミルトングラフである。(If the degree of every vertex of a connected graph is even, then it is a Hamilton graph.)

(2) 一筆書きはできるが、オイラーグラフではないグラフには、奇数次数の点が必ず 2 個ある。(If a graph can be drawn in one stroke but is not a Euler graph, then there are exactly two vertices of odd degree.)

(3) 10 点上の 7 正則グラフは少なくとも一つはある。(There are at least one 7-regular graph on 10 vertices.)

(4) 今回の数学の世界は、85 人が受講している。受講者の中で、お互いに知っている人の数を調べるとする。すると、奇数人と知り合いの受講者は、必ず偶数人いる。(85 students are enrolled in Wold of Mathematics 2010. Then there are even number of students who know (mutual acquaintance) odd number of students.)

(5) 連結な平面グラフの辺の数を e、面の数を f とすると、常に、$2e \geq 3f$ が成り立つ。(A connected plane graph has e edges and f faces. Then $2e \geq 3f$.)

(6) 図 1 のグラフは平面的グラフである。(The graph on the left below is a planar graph.)

図 1

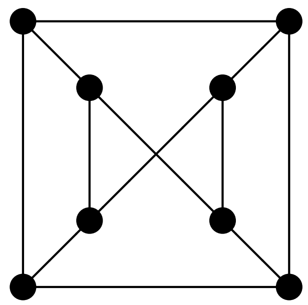
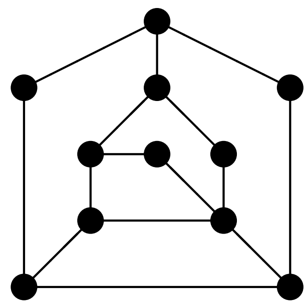


図 2



(7) 図 2 のグラフはハミルトングラフである。(The graph on the right above is a Hamilton graph.)

(8) 合計で 10 人の男女がダンスをした。男性は女性と、女性は男性とのみダンスをした。それぞれが、丁度 4 回ずつダンスをしたとすると、男性の数と、女性の数は必ず同数でなければならない。(Each of the 10 people danced with a person with opposite sex exactly four times. Then there are 5 females and 5 males.)

* これは 1998 年度の一般教育科目「数学の構造」の期末試験から改編したものです。AY2010 Final では正誤問題は出しません。論理の問題は含まれていませんが、それは期末試験の範囲です。This is mainly taken from AY1998 Final. No true or false problems but problems on logic should be included in Final.

(9) 7 点上の木は 10 種類以上ある。(There are at least 10 non isomorphic trees on 7 vertices.)

(10) 高校以上の数学は必要だと思う人だけ勉強すれば良い。(Mathematics in high school level or higher is for those feel the need of it.)

II. 答えのみ解答欄に記入せよ。答えに、${}_nC_m$ があっても良い。(Solution only. Don't evaluate ${}_nC_m$.)

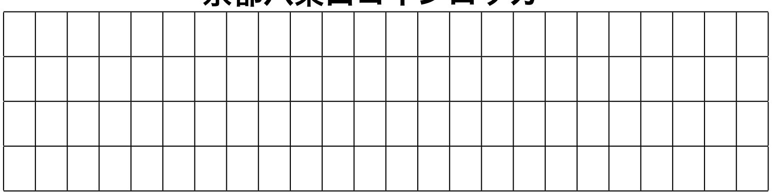
(1) 14 個入りのキャラメルを一箱買って、5 人の兄弟に分けたい。それぞれが最低 1 個はもらえるようにすると、何通りの分け方があるか。(How many ways are there to distribute 14 candies to 5 children so that each gets at least one?)

(2) 14 個入りのキャラメルを一箱買って、5 人の兄弟に分けたい。1 個ももらえない子どもがいてもよいとすると、何通りの分け方があるか。(How many ways are there to distribute 14 candies to 5 children?)

(3) 15 両編成の東京発岡山行き 19:12 発ひかりには、11 月 1 日、164 人が乗車していた。このとき、何号車かには、必ず n 人以上の乗客がいたと結論出来る最大の自然数 n を求めよ。(164 passengers are on a Hikari Super Express bound for Okayama with 15 cars. What is the largest number n we can always guarantee that there are at least n passengers in one of the cars.)

(4) 京都八条口の、コインロッカーは 4 段 24 列並んでいる。このコインロッカーが m 個しか使用されていなければ、必ず、ある段か、ある列に 2 個続けて使用されていないロッカーがある。このようにいつでも判断できる最大の自然数 m を求めよ。(Coin lockers in Kyoto Hachijo Exit are in 4 by 24 array. What is the largest number m we can always guarantee that there are at least two vacant adjacent lockers even if m lockers are occupied?)

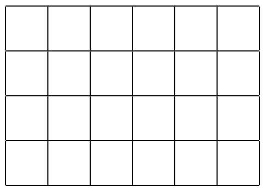
京都八条口コインロッカー

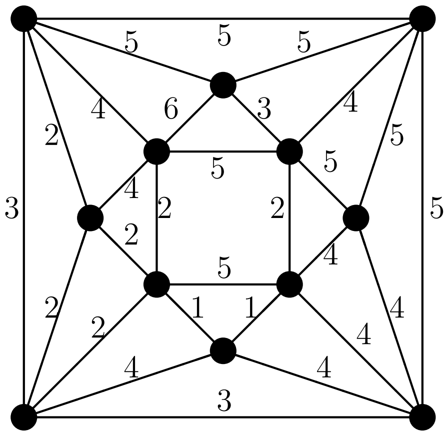


(5) $4096 = 2^{12}$ を。2 以上の 5 個の自然数の積として表す表し方は幾つあるか。積の順序も考慮に入れるとする。(How many ways are there to express $4096 = 2^{12}$ as a product of 5 integers at least 2 by taking the order of the product into consideration.) $2^8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ and $2 \cdot 2^8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ are considered different.

(6) ある連結な k-正則平面グラフには、面が 32 あり、それらは、三角形 20 個と、5 角形 12 個であるという。このとき、k はいくつか。(A connected k-regular plane graph has 32 faces with 20 triangles and 12 pentagons. Find k.)

(7) 下の様な 4×6 の格子の中に長方形（正方形も含む）はいくつあるか。(How many rectangles (including squares) are there in the following 4×6 grid?)





(8) 右上の 12 の点を結ぶネットワークを作る。辺の数字は、その線を建設する価値を点数で表したものとする。一本の線の建設費は全て同じとする。このとき、全ての点が間接的には、全てつながり、一番建設費は少ないが、価値の合計点は、最大にしようと思う。このとき、考えうるもので、価値の合計点が最大であるものは、その合計点がいくつになるか。(Find the network with lowest cost and highest total value using the information in the right above digram. The cost of each line represented by a line segment is equal and the number represents the value of each line.)

(9) 10 人の人が互いに握手を交わした。そのうちの 9 人の人の握手した回数は、それぞれ、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 回であった。残りの一人の握手した回数が決まればその数を、決まらなければ「決まらない」と書け。(10 people shook hands and nine of them shook hands with 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 respectively. Is it possible to determine the number of times the remaining person shook hands with? If possible, determine the number, if not, state so.)

(10) 11 点上の 8 正則グラフは何種類あるか。(How many non-isomorphic 8-regular graphs on 11 vertices are there?)

III. (1) 8×8 の普通のチェス盤は、白と黒で市松模様にぬってある。このとき、白 2 マスを除外したものは、その 2 マスがどの 2 マスであっても、それ以外の部分を 1×2 の板を、縦又は、横におくことによって敷き詰めることはできないことを示せ。(Suppose two white squares are excluded. Show that it is impossible to cover up the remaining squares of the 8×8 chess board by 1×2 tiles without overlapping.)

(2) 8×8 の普通のチェス盤は、白と黒で市松模様にぬってある。このとき、白 1 マス、黒 1 マスを除外したものは、その 2 マスがどの 2 マスであっても、1×2

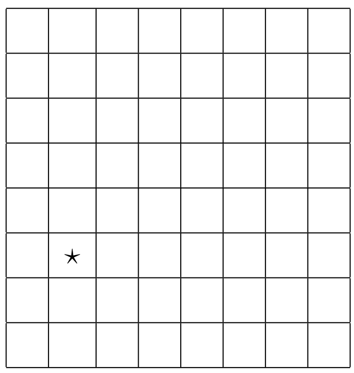
の板を、縦又は、横におくことによって敷き詰めることができることを示せ。(Suppose two squares, one black and one white, are excluded arbitrarily. Show that it is possible to cover up the remaining squares of the 8×8 chess board by 1×2 tiles without overlapping.)

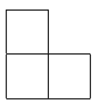
(3) ある年の 数学の世界 の授業は、28 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考えた。ただし、全部で、45 問は越さない（45 問以下）ものとする。このとき、「丁度 10 問考える期間がある。」（例えば、3 時間目から 15 時間目に考えた問題をあわせると丁度 10 問と言うような期間が必ずあるということです。）ことを示せ。(World of Mathematics in the past had 28 periods and they discussed at least one problem in each period and total of at most 45. Show that there is a time span they discussed exactly 10 problems.)

(4) ある年の 数学の世界 の授業は、28 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、45 問は越さない（45 問以下）ものとする。このとき、「丁度 28 問考える期間がある。」（例えば、3 時間目から 15 時間目に考えた問題をあわせると丁度 28 問と言うような期間が必ずあるということです。）ことを示せ。(Under the same condition of the previous problem, show that there is a time span they discussed exactly 28 problems.)

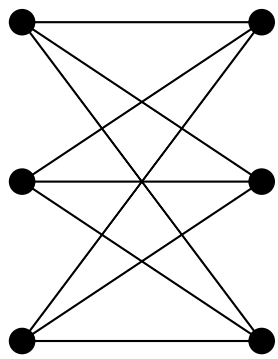
(5) サイズが、$2^n \times 2^n$ $(n \geq 1)$ の盤から、単位正方形を一つ抜き取ったものを B_n とする。どのように抜き取っても、B_n は、B_1 で、敷き詰めることが出来ることを示せ。(B_n is a board taken one square out of $2^n \times 2^n$ $(n \geq 1)$ board. Show that B_n can be covered by B_1's without overlapping.)

例：B_3 $\star$ のところを抜き取ったもの。





B_1



(6) $K_{3,3}$（右上の図参照）は平面的グラフではないことを証明せよ。(Show that $K_{3,3}$ depicted above right is not planar.)

Please study Handouts, Final 2006, Final 2008, Quizzes on the web. Information in Moodle should be helpful.