1 Sets and Logic

集合 (Set)： 「もの」の集まり (A set is a finite or infinite collection of objects.)
どんなものをもってきてもよいが、それがその集まりの中にあるかないかがはっきりと定まっているようなものでなければならない。

元、要素 (Element)： 集合 A のなかに入っている個々の「もの」を A の元、要素といい、a が集合 A の元であることを、記号で次のように書く。

$$a \in A \text{ または } A \ni a \qquad (a \text{ is an element of } A, \text{ or } a \text{ belongs to } A.)$$

a は A の属する、a は A に含まれるなどと言う。その否定 (a は A の元ではない) を次のように書く。

$$a \notin A \text{ または } A \not\ni a \qquad (a \text{ is not an element of } A, \text{ or } a \text{ does not belong to } A.)$$

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ のように、A を表すのに A の元をすべて列挙する仕方と、$A = \{x \mid x$ は 10 以下の素数$\}$ $= \{x \mid x$ is a prime at most $10\}$ の様に、その元の満たすべき条件を記述する仕方とがある。

部分集合 (Subset)： 集合 A、B において A のすべての元が、B の元であるとき、A は B の部分集合であると言い次のように書く。

$$A \subset B \text{ または } B \supset A$$

集合の相等 (Equality of Sets)： 二つの集合 A, B において、$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つ時 A と B は相等であると言い $A = B$ と書く。

共通部分 (Intersection)： 二つの集合 A, B において、A と B の両方に共通な元全体の集合を A と B との共通部分といい $A \cap B$ と書く。すなわち、

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\} = \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

和集合 (Union)： 二つの集合 A, B において、A の元と B の元とを全部寄せ集めて得られる集合を A と B との和集合といい $A \cup B$ と書く。すなわち、

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\} = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$

空集合 (Empty Set)： 元を全く含まない集合を空集合といい $\emptyset$ で表す。

差集合 (Difference)： 二つの集合 A, B において、A の元で B の元ではない元全体の集合を A と B との差集合といい、$A \setminus B$ または $A - B$ と書く。すなわち、

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

補集合 (Complement)： 全体集合 (U または Ω が良く使われる：(Universal Set)) を一つ定めた時その部分集合 A に対し、A に含まれない要素全体を A^c または $\overline{A}$ で表し、A の補集合と言う。

命題 (Proposition)： 正しい (真 True) か正しくない (偽 False) が明確に区別できる文を命題という。「正しい」を「成り立つ」、「正しくない」を「成り立たない」と考えても良い。

真理値 (Truth Value)： 命題が真であることを「T」、偽であることを「F」で表す。これを命題の真理値という。

否定 (negation)・論理和 (logical or)・論理積 (logical and)・含意 (implication): $\neg p$、$p \vee q$、$p \wedge q$、$p \Rightarrow q$

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

全称命題 (Universal Proposition)： 「任意の（すべての）x について命題 $p(x)$ が成り立つ (For all x, the proposition $p(x)$ holds.)」を全称命題といい $\forall x\, p(x)$ と書く。

存在命題 (Existential Proposition)： 「ある x について命題 $p(x)$ が成り立つ (There exists x such that $p(x)$ holds.)」を存在命題といい $\exists x\, p(x)$ と書く。

2 One-to-one Correspondence

Definition 2.1 順列 (Permutation) 集合 S の要素を順序をつけて並べたもの。n 個の要素を持つ集合 S の r 個の要素の順列で重複をゆるさないものの数を ${}_nP_r$ と書く。(A *permutation* is an ordered selection of objects from a set S. The number of permutations of n things taken r at a time, without repetition is written as ${}_nP_r$.)

組合せ (Combination) 集合 S の要素のいくつかの組み（順序を考えに入れない）。n 個の要素を持つ集合 S の r 個の要素の組合せで重複をゆるさないものの数を ${}_nC_r = \binom{n}{r}$ と書く。A *combination* is an unordered selection of objects from a set S. The number of combinations of n things taken r at a time is written as ${}_nC_r = \binom{n}{r}$.)

Example 2.1 $S = \{a, b, c\}$ としたとき、重複をゆるした (allowing repetition) 2 個の順列の数は、9, 重複をゆるさない 2 個の順列は 6、重複をゆるした 2 個の組合せは 6 個、重複をゆるさない 2 個の組合せは 3 個である。

Proposition 2.1 n を自然数としたとき、$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ を n の階乗 *(factorial)* という。特に、$0! = 1$ とする。このとき次が成り立つ。

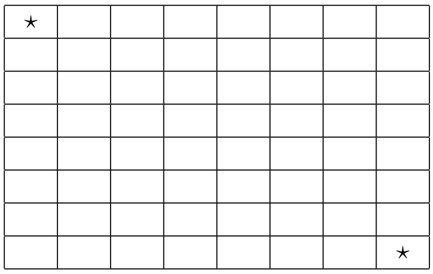
(i) ${}_nP_r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

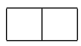
(ii) ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\cdot(r-1)\cdots 1} = \dbinom{n}{r}$.

Problems

1. 49 チームでトーナメント戦を行なう。ただし、敗者復活戦を設け、敗者復活戦 (repechage) でも敗れた場合失格とする。引き分けはないものとし、最後に 1 チーム残す（優勝チームを決める）ためには、最大、何試合が必要か。
2. 4×5 の格子の中に長方形はいくつあるか。
3. 12 個入りのキャラメルを一箱買って、5 人の兄弟に分けたい。それぞれが最低 1 個はもらえるようにすると、何通りの分け方があるか。
4. 12 個入りのキャラメルを一箱買って、5 人の兄弟に分けたい。何通りの分け方があるか。
5. 自然数 n を m 個の自然数の和として表すとき、加える数の順序も考慮に入れて何通りの表し方があるか。
6. $0 \le a \le b \le c \le d \le 12$ であるような自然数の組 (a, b, c, d) は全部で何通りあるか。
7. $0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_m \le n$ であるような自然数の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ は全部でいくつあるか。
8. 左上から始めて、順に、右または、下に進む方法で、MATHEMATICS とつづる方法はいくつあるか。

$$\begin{array}{cccccc} M & A & T & H & E & M \\ A & T & H & E & M & A \\ T & H & E & M & A & T \\ H & E & M & A & T & I \\ E & M & A & T & I & C \\ M & A & T & I & C & S \end{array}$$





9. 上のようなチェス盤から、$\star$ のところを取り除いたものは、 1×2 のパイで埋め尽くすことが出来るか。

Challenge Problem 4 人でするゲームがある。何試合かし、どの二人も丁度一回同じグループで試合をするとする。全体の人数が 8 人、12 人のとき、このような試合の組合せを作ることができるか。16 人の時はどうか。どのような人数の時可能だろうか。

3 Mathematical Induction

Theorem 3.1 (数学的帰納法 (Mathematical Induction)) $p(n)$ を自然数 $n = 1, 2, \ldots$ に関する命題とし、次の (i)、(ii) が成立しているとする。*(Let $p(n)$ be a proposition on a positive integer n ($n = 1, 2, \ldots$) satisfying the following conditions* (i) *and* (ii)*.)*

(i) $p(1)$ は真。*($p(1)$ is true.)*

(ii) 任意の自然数 k について $p(k)$ が真ならば、$p(k+1)$ が真。*(For any positive integer k, $p(k)$ is ture implies $p(k+1)$ is true.)*

このとき、すべての自然数 n について $p(n)$ は真である。*(Then $p(n)$ is true for all positive integers n.)*

論理記号で次のようにも書く。ここで、$\boldsymbol{N} = \{1, 2, \ldots\}$ は自然数全体の集合を表すものとする。

$$(p(1) \wedge (\forall k \in \boldsymbol{N})[p(k) \Rightarrow p(k+1)]) \Rightarrow (\forall n \in \boldsymbol{N})[p(n)].$$

3.1 Problems

数学的帰納法を用いて次を証明せよ。Use mathematical induction to prove the following.

1. $q_1, q_w, \ldots, q_n$ を命題 (proposition) とする。このとき、
$$\neg(q_1 \wedge q_2 \wedge \cdots \wedge q_n) \equiv (\neg q_1) \vee (\neg q_2) \vee \cdots \vee (\neg q_n), \quad \neg(q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n) \equiv (\neg q_1) \wedge (\neg q_2) \wedge \cdots \wedge (\neg q_n).$$
2. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$
3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$
5. $(1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots n^5) + (1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + n^7) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5 + \sum_{k=1}^{n} k^7 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^4.$
6. $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ は、133 で割り切れる。($11^{n+1} + 12^{2n-1}$ is divisible by 133.)
7. ${}_nC_r = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 1}$. ($\{1, 2, 3, \ldots, k, k+1\}$ の中から、r 個取り出す組合せを考える。$k+1$ を含まないものと含むものに分けて考えると得られる次の式を用いよ。${}_{k+1}C_r = {}_kC_r + {}_kC_{r-1}$.)
8. $2^n \times 2^n - 1$ は、3 で割り切れる。
9. サイズ $2^n \times 2^n$ のチェス盤から一ますを抜き取ったものを B_n と呼ぶことにすると、すべての、B_n は、B_1 で敷き詰めることが出来ることを示せ。
10. サイズ $2^n \times 2^n \times 2^n$ のブロックから一ブロックを抜き取ったものを T_n と呼ぶことにすると、すべての、T_n は、T_1 で埋め尽くすことが出来ることを示せ。

Challenge Problems

1. $n \times n$ のチェス盤の正方形の数は、$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. 集合 A の要素 a, b に対していつでも $a * b$ で表される A の要素が一つに決まるときに、集合 A に演算 $*$ が定義されているという。(例：数の足し算、かけ算、整数の最大公約数、命題に関する $\wedge, \vee$ など。) [AL] $(a * b) * c = a * (b * c)$ が常に (すなわち、すべての $a, b, c \in A$ について) 成立していれば、$a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ をどのようにかっこを付けて計算しても同じ A の要素となることを示せ。(例:$n = 4$ の場合は、$(a_1 * a_2) * (a_3 * a_4) = ((a_1 * a_2) * a_3) * a_4 = (a_1 * (a_2 * a_3)) * a_4 = a_1 * ((a_2 * a_3) * a_4) = a_1 * (a_2 * (a_3 * a_4))$ ですべて等しくなります。たとえば最初の等号は $a = a_1 * a_2$, $b = a_3$, $c = a_4$ とおいて [AL] を用いれば示すことができます。) [AL = Associativity Law 結合法則]
3. (Fibonacci Series) $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ としたとき、$F_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$.

4 Pigeonhole Principle

鳩ノ巣原理　m 個の巣箱のいずれかに n 羽の鳩が入っているとする。$n > m$ ならば巣箱のうちのどれか一つには、2 羽以上の鳩が同居している。If n pigeons are put into m pigeonholes, and if $n > m$, then at least one pigeonhole must contain at least two pigeons.

Variations　1. m 個の巣箱のいずれかに n 羽の鳩が入っているとすると、$n > k \cdot m$ ならば巣箱のうちのどれか一つには、$k+1$ 羽以上の鳩が同居している。If n pigeons are put into m pigeonholes, and if $n > k \cdot m$, then at least one pigeonhole must contain at least $k+1$ pigeons.

2. m 個の巣箱のいずれかに n 羽の鳩が入っているとすると、$n < k \cdot m$ ならば巣箱のうちのどれか一つには、$k-1$ 羽以下の鳩が同居している。If n pigeons are put into m pigeonholes, and if $n < k \cdot m$, then at least one pigeonhole must contain at most $k-1$ pigeons.

4.1 Problems

1. 7km 四方の正方形の形をした町に、50 軒の家がある。するとどの 2 軒かの距離は、1.5km 未満である。(There are 50 houses in a square-shaped village (7km the side length). Then there is a pair of houses with less than 1.5 km apart.)
2. 一辺が 40cm の正三角形の的がある。この的に、17 発の玉が当たったとすると、当たった場所の距離が 10cm 以内である 2 点が必ずあることを証明せよ。(17 bullets hit an equilateral-triangle-shaped target (40 cm the side length). Then there is a pair of holes with at most 10 cm apart.)
3. n 人がパーティーに出席している。各人について知り合いが何人いるかを調べる。このとき、知り合いの人数が同数であるような二人が存在することを示せ。(At any party, there is a pair such that the numbers of acquaintances of the two are same.)
4. 国際基督教大学では水曜日の 3 時限目 1643 人の学生が 35 の教室で講義を聞いている。このときどこかの教室には、ある学科の学生は n 人以下しかいない。この文が正しくなるような一番小さな n は何か。学科数は 6 とする。(Assume 1643 students are attending 35 classes now. Then at least one of the classes has at most n students from a certain division. Find the smallest n.)
5. 21 軒続きの長屋に 6 人の人が住んでいる。すると、必ず 3 軒続きの空き家がある。
   $(k+1)(m+1)$ 軒続きの長屋に k 人の人が住んでいる。すると、必ず $m+1$ 軒続きの空き家がある。
6. $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \boldsymbol{N}$ とすると、ある部分和は n で割り切れることを示せ。
7. 77 日間連続で練習をし、一日最低 1 ゲームはし、合計で 132 ゲームを越さないようにすると、ある期間のゲーム数の合計が丁度 21 ゲームになることが必ずある。
8. 今年の NSIA の授業は、28 時間あり、毎時間最低 1 問は問題を考える。ただし、全部で、45 問は越さない（45 問以下）ものとする。このとき、「丁度 28 問 考える期間がある。」（例えば、3 時間目から 15 時間目に考えた問題をあわせると丁度 28 問と言うような期間が必ずあるということです。）
9. 平面上の一般の位置（どの 3 点も同一直線上にない）に、5 点がある。このとき、それらの中にある、4 点を頂点とする凸四角形が必ず存在する。
   予想：$2^{n-2}+1$ あれば、凸 n 角形が存在する。($n=4 \to 5$, $n=5 \to 9$ OK. $n \geq 6$ 未解決。)
10. 800 人の有権者がいる村で村会議員の選挙があり、定員 6 人に対して 9 人が立候補した。決選投票を行うことなく、確実に当選するには最低何票得票すれば良いか。ただし、立候補者にも投票権があり、投票率は 70%で、白票や無効票はなくすべて有効票であるものとする。(平成 6 年度国税専門官試験改題 鈴木清士著「判断力を高める推理パズル（キャリア官僚試験に挑戦する）」Blue Backs 講談社)

Challenge Problems

1. １から $2n$ までの整数の中から、n+1 個の数を取り出すと、必ず一方が他方を割る 2 数がある。
2. 有理数を少数で表せば、必ずある桁以降は循環するようになる。
3. どんな実数にもそれにいくらでも近い有理数（分数）がある。すなわち、a を実数とする。$Q > 1$ を自然数とすると、整数 p, q $(0 < q < Q)$ で、$|qa - p| \leq 1/Q$ を満たすものがある。（このとき、$|a - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{Q}$）

5 Introduction to Graphs

Definition 5.1 V を集合 、V の 2 個の要素からなる集合を辺 (edge) と呼ぶ。集合 V と、V のいくつかの辺からなる集合 E (辺集合と呼ぶ) の組みをグラフといい、$\Gamma = (V, E)$ と書く。V を頂点集合、V の要素を頂点 (vertex) とも呼ぶ。$\{a, b\} \in E$ のとき、すなわち、a, b が 辺 $\{a, b\}$ に含まれる頂点であるとき、a, b は隣接している (adjacent) といい $a \sim b$ と書く。頂点を点で、隣接した 2 点を線で結んでグラフを表すこともある。V の要素の名前の付け方だけの違いで、隣接関係が同じのグラフを同型（isomorphic グラフとしては本質的に同じ）という。$x \in V$ のとき、x と隣接している頂点の集合を $\Gamma(x) = \{y \mid (y \in V) \wedge (\{x, y\} \in E)\}$ と書く。また $\Gamma(x)$ に含まれる頂点の数を x の次数 (degree) とよび $\deg(x)$ と書く。ここでは V の要素の数が有限の場合のみ考える。(A *graph* $\Gamma = (V, E)$ is a pair of sets V and E. Elements of V are called *vertices*, those of E *edges*, V *vertex set* and E *edge set*. If $\{a, b\}$ is an edge, the vertex a is said to be *adjacent* to the vertex b and we write $a \sim b$. We often depict vertices by points and edges by lines between adjacent vertices. When only the labels (the symbols to represent vertices) are different, two graphs are said to be *isomorphic*. For $x \in V$, we write $\Gamma(x) = \{y \mid (y \in V) \wedge (\{x, y\} \in E)\}$, and the number of vertices in $\Gamma(x)$ is called the *degree* of x and denoted by $\deg(x)$. We always assume that V is a finite set.)

Theorem 5.1 $\Gamma = (V, E)$ をグラフとし、v で頂点の総数。e で辺の総数を表すとする。$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$ とすると、次が成立する。*(Let $\Gamma = (V, E)$ be a graph. Let v denote the number of vertices, e the number of edges and $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$. Then the following hold.)*

(i) $\sum_{x \in V} \deg(x) = \deg(x_1) + \deg(x_2) + \cdots + \deg(x_v) = 2 \cdot e$.

(ii) $\deg(x)$ が奇数の点は、偶数個存在する。*(There are even number of vertices of odd degree.)*

(iii) Γ のすべての点の次数が等しくすべて k とすると、$k \cdot v = 2 \cdot e$ で、特に、k か v かいずれかは偶数である。*(If the degree of every vertex is equal to a fixed number k, then $k \cdot v = 2 \cdot e$. In particular, either k or v must be even in this case.)*

5.1 Problems

1. 7×7 のチェス盤上の各ますにナイトをおいたとき、各ナイトがいっせいに動くことができるか。
2. 7×7 のチェス盤上で、ナイトがすべてのますを一周回ってもとに戻れるか。
3. 8×8 のチェス盤上では、ナイトがすべてのますを丁度一回ずつ回ってもとに戻ってくることができることが知られている。このとき、次を示せ。
   (a) 8×8 のチェス盤上の各ますにナイトをおいたとき、各ナイトがいっせいに動くことができるか。
   (b) 8×8 のチェス盤上で、黒 1 ます、白 1 ます取り去った盤の各ますにナイトをおいたとき、各ナイトがいっせいに動くことが出来るか。
4. $4 \times n$ の盤で、ナイトは一周回ってもとに戻れるか。
5. 奇数の国と隣接している国は偶数。また、国の数が奇数なら、偶数の国と隣接している国は奇数。
6. NSIA のクラスの教員および受講生合計 151 人が互いに握手を交わした。このとき、次を示せ。(151 people of NSIA class shook hands. Show the following.)
   (a) 奇数人の人と握手をした人は必ず偶数人いる。(Even number of people shook hands with odd number of people.)
   (b) 偶数人の人と握手した人は必ず奇数人いる。(Odd number of people shook hands with even number of people.)
   (c) すべての人がちょうど 13 人の人と握手することは絶対にあり得ない。(It is impossible that everyone shook hands with exactly 13 people.)
7. 鈴木夫妻は、最近同伴でパーティーに出席し、そこには他の 4 組の夫婦が同伴で出席していた。いろいろな人の間で握手が交わされた。どの人も自分の同伴者とは握手をしなかった。握手の後、鈴木氏は、妻を含めた各人に何人と握手したかを尋ねた。するとどの人も、異なる回数を応えた。さて、鈴木夫人は何回握手したか。

Challenge Problems 8×8 のチェス盤上で、ナイトがすべてのますを丁度一回まわってもとに戻れることを示せ。

6 Trees and Optimization

Definition 6.1 $\Gamma = (V, E)$ をグラフとする。$v_0 \sim v_1 \sim v_2 \sim \cdots \sim v_\ell$ で、$v_0 \neq v_2, v_1 \neq v_3, \ldots, v_{\ell-2} \neq v_\ell$ となっているものを v_0 と v_ℓ を結ぶ長さ ℓ の路 (a *path* of length ℓ connecting v_0 and v_ℓ) という。特に、$v_0 = v_\ell$ のときは、閉路 (*closed path*, or *circuit*) という。V のどの 2 頂点 x, y に対しても、x と y を結ぶ路があるとき、グラフ Γ は連詰 (*connected*) であるという。

連結かつ閉路を含まないグラフを木 (tree) という。(A *tree* is a connected graph without circuits.)

Theorem 6.1 $\Gamma = (V, E)$ を頂点の数が v、辺の数が e であるグラフとすると、次は同値。

(i) Γ は木である。

(ii) Γ のどの 2 頂点 x, y に対しても x と y を結ぶ路が丁度 1 本存在する。

(iii) Γ は閉路を含まないが、任意に 1 本の辺を加えると閉路を含む。

(iv) Γ は連結で、かつ、頂点の数より、辺の数が、丁度 1 個少ない。すなわち $e = v - 1$。

最適木アルゴリズム（algorithm, 算法）： $\Gamma = (V, E)$ を各辺に値がついているグラフとする。

I 値のもっとも小さい辺を e_1 とする。

II $e_1, \ldots, e_i$ が与えられているとき $E \setminus \{e_1, \ldots, e_i\}$（$E$ から $\{e_1, \ldots, e_i\}$ を除いた集合）から e_{i+1} を、次の条件を満たすように順々にとる。とれないときは、III へ。

(1) $\{e_1, \ldots, e_{i+1}\}$ は、閉路を含まない。

(2) 上の条件のもとで最も値が小さい。

III 終了。

Theorem 6.2 上の、アルゴリズムを用いて得られた部分グラフは、最適木（*optimal tree:* 辺の値の和が最小で Γ のすべての頂点を頂点集合とする木）である。

Proof. F をこの方法で作られた木とし、G を任意の木とする。F の辺の値の和は、G の辺の値の和を越えないことを示す。

F を構成する過程で、G に含まれない辺で初めに現れるものを、a とする。G に、a を加えたものは、閉路を含む。F は、木であるから、この閉路上の辺を全ては含まない。b をこの閉路上の辺で、F に含まれないものとする。G から、b を取り除いて、a を加えたものを、H とする。H は、連結で、辺の数が、点の数より 1 少ないグラフだから、木である。かつ、G よりも、1 本よけいに、F の辺を含み、かつ、辺の値の総和は、G のそれよりは小さい。これを続けていけば、F と、同じグラフが得られ、最初の、F の辺の値の総和は、G の辺の値の総和を越えないことがわかる。 ■

6.1 Problems

1. 6 点以下の木を全て決定せよ。
2. 7 点の木をすべて決定せよ。
3. a, b, c, d, e, f を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。それぞれの 2 点間を結ぶ費用が次のように与えられている時、その最小の費用はいくらか。そのネットワークも図示せよ。ab = 1, ac = 2, ad = 3, ae = 5, af = 4, bc = 2, bd = 4, be = 4, bf = 5, cd = 3, ce = 5, cf = 4, de = 4, df = 5, ef = 2（単位は万円）

Challenge Problem 次のようなアルゴリズムを考える。

I 値のもっとも大きい辺を e_1 とする。

II $e_1, \ldots, e_i$ が与えられているとき $E(G) \setminus \{e_1, \ldots, e_i\}$ から e_{i+1} を、次の条件を満たすように順々にとる。とれないときは、III へ。

(1) $\{e_1, \ldots, e_{i+1}\}$ を取り除いたものも連結。

(2) 上の条件のもとで最も値が大きい。

III 上の操作で選んだ辺を取り除いたグラフをとり、終了。

上の、アルゴリズムを用いて出来たものは、最適木を与えることを示せ。

7 Euler Graphs and Hamilton Graphs

7.1 一筆書きと オイラーグラフ

Definition 7.1 グラフ Γ の全ての辺を丁度１回通る閉路を、オイラー[1]閉路といい、オイラー閉路のあるグラフを、オイラーグラフと呼ぶ。(*Eulerian circuit* of a graph Γ is a closed path which uses each edge exactly once. A graph containing an Eulerian circuit is called an *Eulerian graph* or *Euler graph.*)

Theorem 7.1 (オイラーグラフ判定法) Γ を連結なグラフとする。Γ が、オイラーグラフであることの必要十分条件は、Γ の各頂点の次数が偶数であることである。*(Let Γ be a connected graph. Then Γ is an Eulerian graph if and only if the degree of each vertex is even.)*

Corollary 7.2 (一筆書き判定法) 連結なグラフが一筆書き可能であることの必要十分条件は、奇数次数の頂点が２個以下であることである。

Proof. 一筆書き可能であれば、奇数次数の頂点が２個以下であることは明らか。また Theorem 5.1 (ii) により奇数次数の頂点が１点であることはない。奇数次数の頂点が一つもないときは、上の定理より、このグラフは、オイラーグラフとなり、一筆書き可能である。奇数次数の頂点が、丁度２個の時は、その２頂点を結ぶ辺を加えると、そのグラフは、上の定理より、オイラーグラフになる。従って、元々、奇数次数だった頂点からスタートすれば、一筆書きが可能である。 ■

Proof of Thorem 7.1. 辺の数に関する帰納法。頂点の数 v は、２以上としてよい。連結かつ各頂点の次数が偶数であることより、辺の最低 v 本ある。従って与えられたグラフは木ではなく、閉路を含む。閉路上の辺を取り除いたグラフの各連結成分は、辺の数が、最初のグラフより少なくかつ、各頂点の次数は、偶数である。従って、各連結成分は、オイラーグラフである。最初のグラフは連結であるから、各連結成分は、取り除いた閉路の頂点を含む。そこで迂回すれば、オイラー閉路が得られる。 ■

7.2 巡回セールスマン問題と Hamilton グラフ

巡回セールスマン問題とは、「いくつかの町と、その間の移動経費（旅費）が書かれている地図を持ったセールスマンが、自分の町から出発して、全ての町を丁度一回ずつ周り、最低の経費で戻ってくる道を探せ。」というものである。殆どの場合において、このような道を見つける効率の良い（頂点（町）の数を n としたとき、“n の多項式時間” で決定できる）アルゴリズムは見つかっていない。(Travelling salesman problem: Given a number of cities and the costs of travelling from any city to any other city, what is the cheapest round-trip route that visits each city exactly once and then returns to the starting city?)

Definition 7.2 グラフ上の全ての頂点を 1 度ずつ通る閉路をハミルトン[2] 閉路といい、ハミルトン閉路のあるグラフをハミルトングラフという。(A Hamiltonian cycle is a cycle in an undirected graph which visits each vertex exactly once and also returns to the starting vertex. A graph that contains a Hamiltonian cycle is called a Hamiltonian graph.)

グラフ Γ について、$\omega(\Gamma)$ は、Γ の連結成分の数（いくつの連結な部分に別れているかを表す数）を表すものとする。

1. ２点以上の ハミルトングラフの各頂点の次数は、２以上。
2. ハミルトングラフは、どの頂点を取り除いても連結である。

Theorem 7.3 $\Gamma = (V, E)$ を ハミルトングラフとする。$S \subset V$ を Γ の頂点の部分集合とする。Δ を Γ から S を取り除いた（頂点 S と同時に S を含む辺も取り除く）グラフとする。このとき、$\omega(\Delta) \leq |S|$ である。

Proof. C を、ハミルトン 閉路とすると、C を s 個の連結成分にわけるためには、最低、s 点、取り除かなければならない。従って、 $\omega(\Delta) \leq |S|$ である。 ■

Conjecture $\Gamma = (V, E)$ を、3 頂点以上のグラフとする。もし、任意の、$S \subset V$ について、S を取り除いたグラフを Δ とする。$\omega(\Delta) = 1$ または、$|S| \geq 2\omega(\Delta)$ ならば、Γ は、ハミルトングラフである。

[1]Leonhard Euler, 1707 年 4 月 15 日 - 1783 年 9 月 18 日
[2]William Rowan Hamilton, 1805 年 8 月 4 日 - 1865 年 9 月 2 日

8 平面グラフとオイラーの公式

Definition 8.1 平面上の頂点集合とそれを交差なく結ぶ辺集合からなるグラフを平面グラフ (plane graph) という。平面グラフと同型なグラフのことを平面的グラフ (planar graph) という。平面的でないグラフを非平面的という。平面グラフにおいては、辺で囲まれた領域を面という。一番外側の面も一つの面と考える。(A *plane graph* is a graph drawn on a plane that no edges intersect. A graph is said to be a *planar graph* if it is isomorphic to a plane graph. A region surrounded by edges is called a *face*, and the outer most part is also considered as a face.)

頂点の数が n でその 2 点がすべて辺となっているグラフを n 点上の完全グラフ (*complete graph*) といい K_n と書く。また、頂点の数が $2 \cdot n$ で、n 点集合 V_1, V_2 二つにわけられ、それぞれの集合内の点同志は隣接していないが、V_1 の点と V_2 の点はすべて隣接しているグラフを完全二部グラフ (*complete bipartite graph*) $K_{n,n}$ という。一般に頂点集合 V が V_1 と V_2 とに分けられ、V_1 の点同士および V_2 の点同士は隣接してないとき、二部グラフ (*bipartite graph*) という。二部グラフは頂点が 2 色で塗り分けられ、同じ色の頂点同士は隣接していないグラフである。二部グラフの閉路の長さは常に偶数である。

Theorem 8.1 (オイラーの公式) Γ を連結な平面グラフとする。このとき、次が成り立つ。

$$\text{頂点の個数 } (v) - \text{ 辺の個数 } (e) + \text{領域の個数 } (f) = 2$$

Proof. 面の数 f に関する帰納法で示す。面の数が 1 の時は閉路がないから、Γ は木である。このときは、$e = v - 1$, $f = 1$ だから、公式は確かに成立する。面の数が f の時公式が成立するとする。Γ を面の数が $f + 1 \geq 2$ の連結な平面グラフ、その頂点の数を v、辺の数を e とする。閉路が存在するから、その閉路上の辺を一つ取り去ると、新しいグラフは、面の数が f, 辺の数が、 $e - 1$、頂点の数が v で連結なグラフとなる。帰納法の仮定により、$v - (e - 1) + f = 2$ が成り立つ。この式は、$v - e + (f + 1) = 2$ とも表せるから、面の数が $f + 1$ の連結な平面グラフに関する、オイラーの公式が得られた。従って、任意の面の数の連結な平面グラフに関して、公式が成立する。 ■

Proposition 8.2 $\Gamma = (V, E)$ を頂点の数が v, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$, 辺の数が e、面の数が f の平面グラフとし、その f 個の面 $F_1, F_2, \ldots, F_f$ はそれぞれ、$n_1, n_2, \ldots, n_f$ 本の辺で囲まれているとする。

(i) $\deg(x_1) + \deg(x_2) + \cdots + \deg(x_v) = 2 \cdot e.$ (Theorem 5.1 (i))
特に、各点の次数が常に k のときは（k-正則という）$k \cdot v = 2 \cdot e$ が成立する。

(ii) $n_1 + n_2 + \cdots + n_f = 2 \cdot e.$
特に、各面が常に n 本の辺で囲まれているときは $n \cdot f = 2 \cdot e$ が成立する。

(iii) 平面的グラフには、次数が 5 以下の頂点がある。

8.1 Problems

1. K_5 は、平面的グラフではない。
2. $K_{3,3}$ は、平面的グラフではない。
3. ある連結な平面グラフは、5-正則（各頂点の次数が 5）、かつ各面はすべて 3 辺形[3]である。このグラフの点の数 v、辺の数 e、面の数 f を求めよ。
4. 連結な平面グラフで、各頂点の次数が 3 で、各面が 5 辺形か、6 辺形であるものを Fullerene[4] という。Fullerene の 5 辺形の数はつねに 12 である。
5. Fullerene で各 5 辺形の辺同志が接しないもので点の数が最小のものは 60 個の頂点からなることが知られている。このような Fullerene の辺の数と、6 辺形の面の数を求めよ。

グラフ Γ のいくつかの辺を路でおきかえて得られるグラフ Δ を、Γ の細分という。Γ が平面的ならば、それを細分して得られたグラフ Δ も平面的であり、逆に、Δ が平面的ならば、Γ も平面的である。従って、平面的グラフは、K_5 または、$K_{3,3}$ の細分を含まない。Kuratowski[5] は、この逆も成立する事を示した。

[3] 3 本の辺で囲まれた面。以下 5 辺形、6 辺形なども同様.
[4] Richard Buckminster Fuller (July 12, 1895 ? July 1, 1983) の名前からとっている
[5] Kazimierz Kuratowski (Warsaw, February 2, 1896 — June 18, 1980)

Theorem 8.3 (Kuratowski (1930)) グラフ Γ が平面的であることと、Γ が K_5 または、$K_{3,3}$ の細分を含まないことは同値である。

Kenneth Appel と Wolfgang Haken は 1970 年に「平面グラフは各頂点を 4 色で塗って、同じ色の点は隣接しないようにすることができる。」ことを証明した。これが、四色定理 (Four Color Theorem) といわれるもので、どんな地図も 4 色あれば隣接する国を違う色で塗り分けることができることを示している。ここでは、5 色で塗ることができることを示す。[6]

Theorem 8.4 平面グラフは各頂点を 5 色で塗って、同じ色の点は隣接しないようにすることができる。

Proof. 背理法でしめす。Γ を 6 色でしか定理の条件で塗り分けることのできないグラフで頂点の数が最も少ないものとする。Γ が連結である。Proposition 8.2 (iii) により Γ には次数が 5 以下の点が存在する。それを x とする。x を取り除いたグラフの頂点の数は、Γ より少ないから、5 色で塗り分けることができる。x に隣接していた点が 4 色以下で塗られていたとすると、x をそこで使われていなかった色にすれば、条件を満たすから、どのような塗り方であっても x と隣接している点の数は 5 でそれらはすべて違う色で塗られている。時計回りに、頂点を x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とし、その色に番号をつけ $1, 2, 3, 4, 5$ とする。$1, 3$ だけで塗られたグラフを考える、もし、x_1 と x_3 の属する連結成分が異なっていれば、x_3 の属する連結成分の色 1 と 3 を入れ替えても、同じ色の点は隣接していない。ところが、すると、x と隣接している点の色の数が 4 色となり、矛盾。x_2, x_4 についても同様ことをすると、x_1 から x_3 に色 1, 3 だけの路があり、x_2 から x_4 に色 2, 4 だけの路があることになる。この様な路はかならず交差するから矛盾。従って、定理の主張が成り立つ。 ∎

8.2 正多面体グラフ

各点の次数がすべて k であるグラフを正則グラフ (*regular graph*) または k-正則グラフという。平面グラフで各面がつねに n 辺形であるようなグラフは、どのようなグラフであろうか。

Theorem 8.5 頂点の数が 3 以上の連結な平面グラフで、各頂点の次数が全て k、かつ、各面が全て n-辺形であるものは、以下のものに限る。ここで、v は頂点の数、e は辺の数、f は面の数を表すものとする。

(i) $k = f = 2$、$n = v = e$、n-辺形。

(ii) $n = k = 3$、$f = 4,\ e = 6,\ v = 4$、正四面体グラフ K_4。

(iii) $n = 4,\ k = 3,\ f = 6,\ e = 12,\ v = 8$、正六面体グラフ。

(iv) $n = 3,\ k = 4,\ f = 8,\ e = 12,\ v = 6$、正八面体グラフ。

(v) $n = 5,\ k = 3,\ f = 12,\ e = 30,\ v = 20$、正十二面体グラフ。

(vi) $n = 3,\ k = 5,\ f = 20,\ e = 30,\ v = 12$、正二十面体グラフ。

Proof. まず、$k = 2$ とすると、n-辺形が得られる。(連結な 2-正則グラフは、n-辺形。)

以下、$k \geq 3$ とする。オイラーの公式 (Theorem 8.1) と、Proposition 8.2 (i), (ii) により、下の式が得られる。

$$v - e + f = 2,\ 2e = nf = kv.$$

次に、$k = 3$ 又は、$n = 3$ である事を示す。実際、上の式を変形すると、

$$v - \frac{kv}{2} + \frac{kv}{n} = 2.$$

kv で割って整理すると、次を得る。

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{kv} > \frac{1}{2}.$$

$k \geq 4,\ n \geq 4$ とすると左辺は 1/2 以下になるので、k または n のどちらかは 3 でなければならない。

$n = 3$ とすると、$2(v-2) = f$ であるから、$kv = 6(v-2)$ を得、これより、$(6-k)v = 12$ を得る。$k \geq 3$ であるから、$k = 3, 4, 5$ となり、それぞれ、正四面体グラフ、正八面体グラフ、正二十面体グラフを得る。

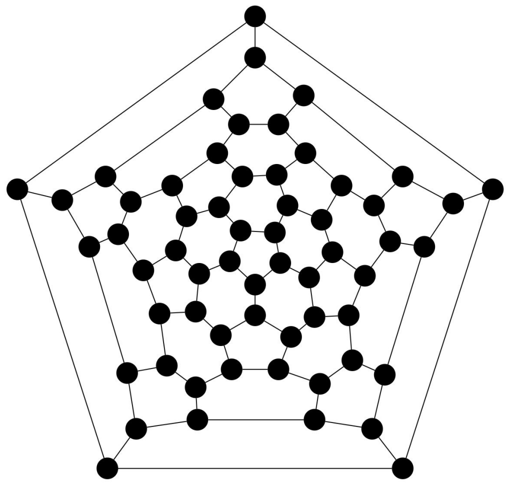
同様にして、$k = 3$ とすると、$2(f-2) = v$ であるから、$nf = 6(f-2),\ (6-n)f = 12$ を得、この場合は、正四面体グラフ、正六面体グラフ、正十二面体グラフを得る。

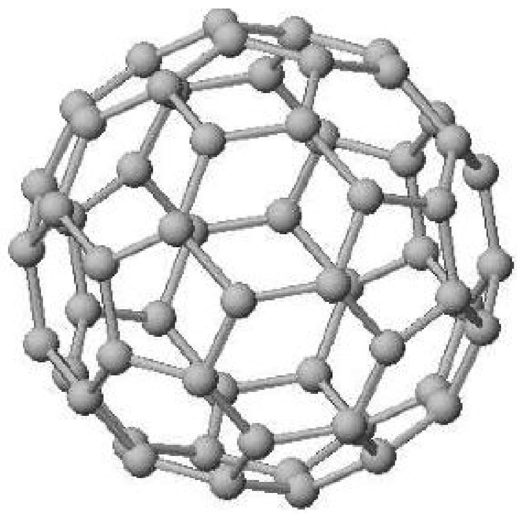
(n, k, f, e, v) が与えられたとき、そのグラフが、正多面体グラフになるかどうかは、検証を要する。それぞれ、確かめてみて下さい。 ∎

[6] 同じ議論から 4 色では定理の条件をたもって塗り分けることができないグラフで点の数が最小のものは、次数が 4 の点を含まないこともわかる。

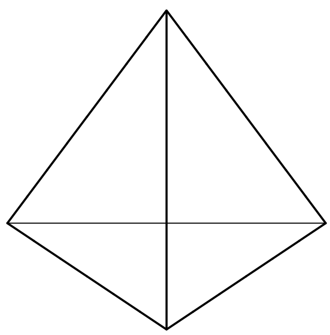
Plane Graphs

8.3 Fullerene

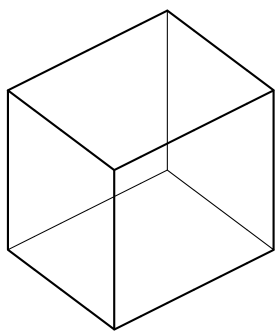




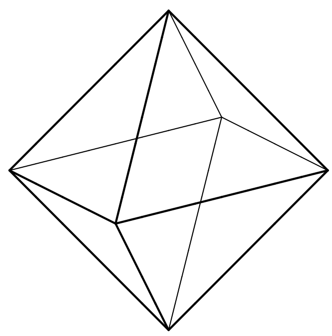
8.4 Platonic Solids



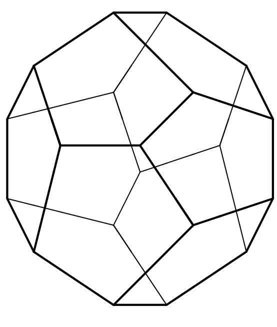
Tetrahedron



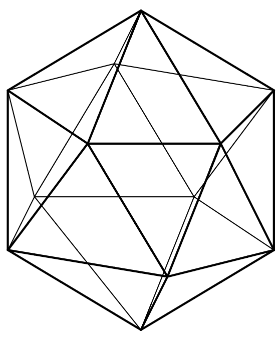
Cube



Octahedron



Dodecahedron



Icosahedron

Figure 1: Platonic Solids