数学の世界 (World of Mathematics) *June 21, 2013*

Final Exam AY2013

ID#: Name:

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある番号または、その内容を明記すること。Whenever you apply theorems and propositions in handouts, quote the statements or their numbers.

1. p, q, r を（論理）命題とする。Let p, q, r be (logical) statements. (10pts)

   (a) 下の三つの（結合）命題の真理値を求めよ。Find the truth values of each of the three (combined) statements below.

p	q	r	$\neg(p \wedge q) \Rightarrow r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	$\neg(p \Rightarrow \neg q)$
T	T	T			
T	T	F			
T	F	T			
T	F	F			
F	T	T			
F	T	F			
F	F	T			
F	F	F			

   (b) 次の式のうち正しいものすべてを丸で囲め。Encircle correct ones.

   i. $\neg(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$,

   ii. $p \wedge q \equiv \neg(p \Rightarrow \neg q)$.

   (c) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\Rightarrow$ と括弧だけを用い、$\wedge$, $\vee$ を使わずに表せ。Express $\neg(p \wedge q) \Rightarrow r$ using only $\neg$, $\Rightarrow$ and parentheses without using $\wedge$ or $\vee$.

Points

1.	2.(a)(b)	(c)(d)	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Total
/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/90 pts

2. H さんはどうしても欲しかった本を買うために 500 円玉を丁度 20,000 円分 (40 枚) 貯金箱に 30 日で貯めることにし、毎日 1 枚は入れ、入れたコインの枚数を記録した。H decided to save exactly 20,000 yen to buy a book H wanted to buy for many years. H deposited 500 yen coins into a piggy bank and saved the amount, i.e., 40 coins, for 30 days, H deposited at least one coin a day, and kept a record how many coins he deposited each day. (20pts)

   (a) 30 日のうちの何れかには、500 円コインを 1 枚しか入れなかった日があることを、背理法を用いて説明してください。Explain by way of contradiction that some day H deposited only one coin.

   (b) 何日目にいくら貯めたかを考えると 30 日間の記録としては全部で何通りあるか。なぜそうなるのか理由とともに、${}_nC_m$ の形で答えてください。In how many ways H can save 20,000 yen in 30 days? Give your answer in ${}_nC_m$ form with an explanation.

   (c) $i = 1, 2, \ldots, 30$ とし、i 日目までに入れた 500 円硬貨の合計数を b_i とする。$b_0 = 0$ とする。ある i と j $(0 \leqq i < j \leqq 30)$ について、$b_j - b_i$ が 30 で割り切れれば、$i+1$ 日目から j 日目まで丁度、30 枚すなわち 15000 円貯めたことになることを説明してください。For $i = 1, 2, \ldots, 30$, let b_i be the total number of coins saved from day 1 to day i. In addition, let $b_0 = 0$. If $b_i - b_i$ is divisible by 30 for some i and j $(0 \leqq i < j \leqq 30)$, we know that from day $i+1$ to day j, H saved exactly 30 coins, i.e., 15,000 yen. Explain this fact.

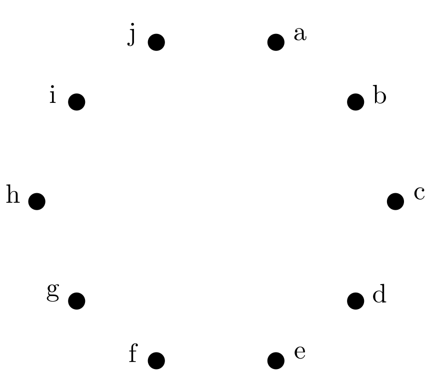
(d) 丁度 30 枚 (15000 円) 貯めた期間があることを説明してください。Explain that there are some period, say from day $i+1$ to day j, H saved exactly 30 coins, i.e., $15,000$ yen.

3. 下の 2 点間を結ぶ費用の表を用い、a, b, c, d, e, f, g, h, i, j を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。We plan to constract a most inexpensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h, i, j using the cost table below. (10pts)

(a) そのようなネットワークは、グラフと考えると木となることを説明してください。Explain that every such network is a tree as a graph.

(b) 費用最小のネットワーク一つを下に図示して下さい。また、その時の費用はいくらか。（単位は万円）Draw a most inexpensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h, i, j below, and give the total cost. (1 unit = 10,000 JPY)

	j	i	h	g	f	e	d	c	b
a	5	4	1	1	2	4	3	4	2
b	5	5	2	4	5	4	2	5	
c	2	3	4	3	2	3	2		
d	3	4	3	5	2	3			
e	3	4	4	3	3				
f	4	3	4	4					
g	3	4	3						
h	4	3							
i	5								



合計 (Total)： **万円 (× 10,000 yen)**

4. 8 頂点または 9 頂点上のグラフについて考える。Consider graphs with eight or nine vertices. (10pts)

   (a) ある頂点の次数が 6 である 9 頂点上の 木 の頂点の次数は、$6, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ であるか $6, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ の何れかであることを説明してください。Explain that if one of the vertices of a tree with 9 vertices has degree 6, then the degree sequence is either $6, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ or $6, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$.

   (b) (a) の条件を満たす木で同型でないものをすべて描いて下さい。Draw all non-isomorphic trees satisfying the conditions in (a).

   (c) 9 頂点上の 7 正則グラフは、一つも存在しないことを説明して下さい。Explain that there are no 7-regular graphs with 9 vertices.

   (d) 8 点上の 6 正則グラフは、すべて同型であること、すなわち本質的には一種類しかないことを説明して下さい。Explain that all 6 regular graphs with 8 vertices are isomorphic, i.e., there is essentially one 6-regular graph with 8 vertices.

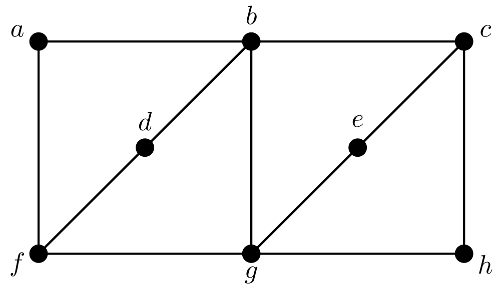
5. Γ は 頂点数が v、辺の数が e、面の数が f である連結な平面グラフである。このとき、命題 p を以下のようにする。 Let Γ be a connected plane graph with v vertices, e edges and f faces. Let p be the following statement on Γ.
p: Γ には、次数が 3 以下の頂点または 3 辺で囲まれている面が存在する。
There is a vertex of degree at most three or a face that is surrounded by 3 edges. (10pts)

   (a) 命題 p を背理法で示す。p を否定すると、$2v \leqq e$ かつ $2f \leqq e$ が成立することを説明して下さい。In order to prove p, by way of contradiction, assume p is false. Explain that $2v \leqq e$ and $2f \leqq e$ hold.

   (b) 命題 p が成立することを説明してください。Explain that the statement p holds.

6. 下のグラフについて考える。Consider the graph below.

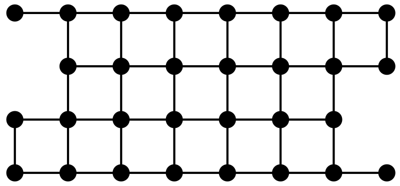
   (a) ハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。 Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$. (10 pts)



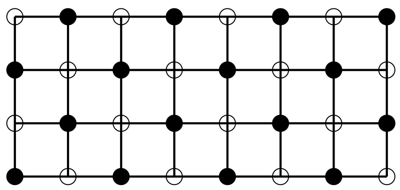
   (b) ある二頂点を辺で結ぶと（新たに辺として加えると）、Hamilton グラフになる。それは、(i) どの頂点とどの頂点か。記号で答えよ。また、(ii) ハミルトン閉路を頂点の記号で示せ。If we connect two vertices of the graph by an edge, then it becomes a Hamilton graph. (i) Which are the two vertices? (ii) Write a Hamilton circuit by the labels of vertices.

   (i) (ii)

7. (a) 下のグラフは、すべての頂点を縦か横の隣接したペアに分割 <u>できない</u> ことを説明して下さい。Explain that it is <u>impossible</u> to partition the vertices of the graph below into vertical or horizontal pairs of adjacent vertices.



(b) 下のグラフは、どの白い頂点を一つと黒い頂点一つを取り除いても、縦か横の隣接したペアに分割 <u>できる</u> ことを説明して下さい。Explain that it is <u>possible</u> to partition the vertices of the graph below into vertical or horizontal adjacent pairs of vertices no matter which of the two vertices, one black and one white, are removed.



8. 重さが $1, 3, 9, 27, 81$ グラムのおもり (weight) がそれぞれ一つずつある。これを用いて天秤 (scale) で、1 グラム刻みで $1, 2, 3, \ldots, 121$ グラムの重さを量ることができることを示したい。There are 5 weights of $1, 3, 9, 27, 81$ grams. We want to show that one can weigh a thing of 1 to 121 grams in 1 gram increments using a balance scale.

   eg. x を計りたいものとして、左に 1g, 3g のおもりと、x をのせ、右に 9 g のおもりをのせ釣り合ったら、x は 5 g であることが判る。When one wants to weigh x, put 1 g and 3 g weights and x on the letft and 9 g weights on the right. If it balances, x is of 5 g.

   (a) 以下の重さを量るときには、どのように、天秤に載せればよいか。When you want to weigh the following, what would you do?

      i. 40 g

      ii. 50 g

      iii. 100 g

   (b) 1g から 40g までは、1g, 3g, 9g, 27g のおもりを用いて 1g 刻みで量ることができることが判っているとして、41g から 121g の間の重さも、 $1, 3, 9, 27, 81$g のおもりを用いて、1g 刻みで量ることができることを説明して下さい。Suppose you know the way to weigh 1g to 40g in 1 gram increments using 4 weights, 1g, 3g, 9g and 27g. Explain that it is possible to weigh 41 to 121 grams in 1 gram increments using a balance scale.

メッセージ （「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write "Do Not Post."）

この授業は受講生の皆さんが (a) 論理的思考・数学的思考を体験すること (b) 一つの数学の世界を垣間見ること (c) 数学を楽しむこと、を目的としました。これらについて、および数学一般について、この授業一般について、特に改善点について、私へのメッセージなど何でも書いて下さい。(There are three purposes of this course; (a) to experience logical and mathematical thinking, (b) to have a glimpse of a world of mathematics, (c) to enjoy mathematics. Give comments on these, mathematics in general, or on this course especially for improvements, etc.)

数学の世界 (World of Mathematics) *June 21, 2013*

Solutions to Final Exam AY 2013

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある番号または、その内容を明記すること。Whenever you apply theorems and propositions in handouts, quote the statements or their numbers.

1. p, q, r を（論理）命題とする。Let p, q, r be (logical) statements. (10pts)

   (a) 下の三つの（結合）命題の真理値を求めよ。Find the truth values of each of the three (combined) statements below.

p	q	r	$\neg(p \wedge q)$	$\Rightarrow$	r	$(p \vee r)$	$\wedge$	$(q \vee r)$	$\neg$	$(p \Rightarrow \neg q)$
T	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$	F
T	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$	F
T	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{F}$	T
T	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$	T
F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{F}$	T
F	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$	T
F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	T	$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{F}$	T
F	F	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$	T

   (b) 次の式のうち正しいものすべてを丸で囲め。Encircle correct ones.

   i. $\neg(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$,

   ii. $p \wedge q \equiv \neg(p \Rightarrow \neg q)$.

   (c) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow r$ を $\neg$ と $\Rightarrow$ と括弧だけを用い、$\wedge$, $\vee$ を使わずに表せ。Express $\neg(p \wedge q) \Rightarrow r$ using only $\neg$, $\Rightarrow$ and parentheses without using $\wedge$ or $\vee$.

   Soln. $\neg(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \neg(\neg(p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r$

2. H さんはどうしても欲しかった本を買うために 500 円玉を丁度 20,000 円分 (40 枚) 貯金箱に 30 日で貯めることにし、毎日 1 枚は入れ、入れたコインの枚数を記録した。H decided to save exactly 20,000 yen to buy a book H wanted to buy for many years. H deposited 500 yen coins into a piggy bank and saved the amount, i.e., 40 coins, for 30 days, H deposited at least one coin a day, and kept a record how many coins he deposited each day. (20pts)

   (a) 30 日のうちの何れかには、500 円コインを 1 枚しか入れなかった日があることを、背理法を用いて説明してください。Explain by way of contradiction that some day H deposited only one coin.

   Soln. 毎日最低 1 枚は入れているから、1 枚しか入れなかった日がないとすると、毎日 2 枚は入れているから、30 日では、最低でも 60 枚入れることになる。30 日で丁度 40 枚だから、これは矛盾である。したがって、丁度 1 枚しか入れなかった日がある。

   Since H deposited at least one coin, H had deposited at least two coins every day if the conclusion was false. Then in 30 days H would have deposited 60 coins, which contradicts that H saved exactly 40 coins in 30 days.

(b) 何日目にいくら貯めたかを考えると 30 日間の記録としては全部で何通りあるか。なぜそうなるのか理由とともに、${}_nC_m$ の形で答えてください。In how many ways H can save 20,000 yen in 30 days? Give your answer in ${}_nC_m$ form with an explanation.

Soln. 40 個のコインの間 39 個に、29 個の仕切りをいれれば、30 日に分けることができるから、${}_{39}C_{29} = {}_{39}C_{10}$ となる。

The number is same as the way placing 29 partitions in the 39 places between coins when 40 coins are arranged in a row. So the number is ${}_{39}C_{29} = {}_{39}C_{10}$.

(c) $i = 1, 2, \ldots, 30$ とし、i 日目までに入れた 500 円硬貨の合計数を b_i とする。$b_0 = 0$ とする。ある i と j $(0 \leqq i < j \leqq 30)$ について、$b_j - b_i$ が 30 で割り切れれば、$i+1$ 日目から j 日目まで丁度、30 枚すなわち 15000 円貯めたことになることを説明してください。For $i = 1, 2, \ldots, 30$, let b_i be the total number of coins saved from day 1 to day i. In addition, let $b_0 = 0$. If $b_i - b_i$ is divisible by 30 for some i and j $(0 \leqq i < j \leqq 30)$, we know that from day $i+1$ to day j, H saved exactly 30 coins, i.e., 15,000 yen. Explain this fact.

Soln. b_j $(j = 1, 2, \ldots, 30)$ は、j 日目までに入れた 500 円硬貨の数だから 40 以下である。$b_0 = 0$ なので、$b_j - b_i$ $(0 \leqq i < j \leqq 30)$ と表される数は、40 以下の自然数である。したがって、これが 30 で割り切れたときは、丁度 30 にならざるをえない。40 以下の自然数で 30 の倍数は 30 だけだからである。また、$b_j - b_i$ は、j 日までに入れたコインの数から、$i+1$ 日目より前に入れたコインの数を引いているので、$i+1$ 日目から j 日目まで丁度、30 枚すなわち 15000 円貯めたことになる。

Since b_j $(j = 1, 2, \ldots, 30)$ is the number of coins deposited from day 1 to day j, this number is at most 40. As $b_0 = 0$, the number $b_j - b_i$ $(0 \leqq i < j \leqq 30)$ is a positive integer and divisible by 30 by assumption. Since 30 is the only multiple of 30 less than or equal to 40, $b_j - b_i = 30$. On the other hand, this number is the number of coins deposited up to day i subtracted from the number of coins deposited up to day j, this is the number of coins deposited from day $i+1$ to day j. Thus this fact tells us that from day $i+1$ to day j, H saved exactly 30 coins.

(d) 丁度 30 枚 (15000 円) 貯めた期間があることを説明してください。Explain that there are some period, say from day $i+1$ to day j, H saved exactly 30 coins, i.e., $15,000$ yen.

Soln. $i = 0, 1, 2, \ldots, 30$ について、b_i を 30 で割った商を q_i、余りを r_i とすると、$b_i = 30q_i + r_i$ $(0 \leqq r_i < 30)$ と書ける。したがって、$0 \leqq r_0, r_1, \ldots, r_{30} \leqq 29$ であるが、これは、31 個の数に 30 個の数字のどれかであることを意味するから、鳩の巣原理により、このなかに同じものが存在する。それを r_i と r_j $(0 \leqq i < j \leqq 30)$ とすると、$r_i = r_j$ だから

$$b_j - b_i = (30q_j + r_j) - (30r_i + r_i) = 30(q_j - q_i)$$

となる。(c) より、これは、$i+1$ 日目から j 日目に丁度 30 枚貯めたことを意味している。

For $i = 0, 1, 2, \ldots, 30$, let $b_i = 30q_i + r_i$ with $0 \leqq r_i \leqq 29$, i.e., q_i is the quotient and r_i the remainder obtained after dividing b_i by 30. Since $0 \leqq r_0, r_1, \ldots, r_{30} \leqq 29$, 31 numbers are in $\{0, 1, \ldots, 29\}$ with 30 varieties. By the Pigeonhole Principle, there exist i and j with $0 \leqq i < j \leqq 29$ such that $r_i = r_j$. Hence

$$b_j - b_i = (30q_j + r_j) - (30r_i + r_i) = 30(q_j - q_i).$$

Now by (c), from day $i+1$ to day j, H saved exactly 30 coins.

3. 下の 2 点間を結ぶ費用の表を用い、a, b, c, d, e, f, g, h, i, j を結ぶ（間接でも良い）ネットワークで費用最小のものを作りたい。We plan to constract a most inexpensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h, i, j using the cost table below. (10pts)

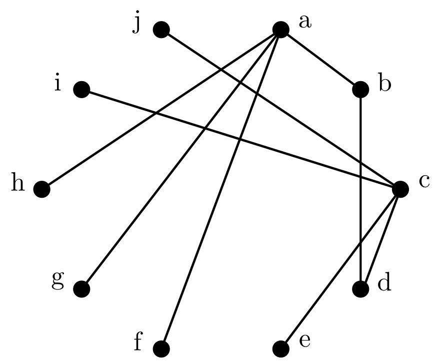
(a) そのようなネットワークは、グラフと考えると木となることを説明してください。Explain that every such network is a tree as a graph.

Soln. 関節的につながっているので、連結である。また閉路があると、閉路の中の一本の辺を取り除いても、連結性が保たれ、より安価なネットワークが作れる。したがって、費用最少なら、閉路をもたない。つまり、グラフとしては、連結で閉路がないから木である。

Since the network connects all points (vertices), the graph corresponding to it is connected. If there is a circuit, the network is not a most inexpensive one. This is because even if one edge in the circuit is removed, the graph remains connected and we can obtain a cheaper network. That means every most inexpensive network does not have a circuit. So as a graph it is connected and does not have a circuit, it is a tree.

(b) 費用最小のネットワーク一つを下に図示して下さい。また、その時の費用はいくらか。（単位は万円）Draw a most inexpensive network connecting a, b, c, d, e, f, g, h, i, j below, and give the total cost. (1 unit = 10,000 JPY)

	j	i	h	g	f	e	d	c	b
a	5	4	1	1	2	4	3	4	2
b	5	5	2	4	5	4	2	5	
c	2	3	4	3	2	3	2		
d	3	4	3	5	2	3			
e	3	4	4	3	3				
f	4	3	4	4					
g	3	4	3						
h	4	3							
i	5								



合計 (Total)：　18　万円 (× 10,000 yen)

4. 8 頂点または 9 頂点上のグラフについて考える。Consider graphs with eight or nine vertices. (10pts)

(a) ある頂点の次数が 6 である 9 頂点上の 木 の頂点の次数は、$6, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ であるか $6, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ の何れかであることを説明してください。Explain that if one of the vertices of a tree with 9 vertices has degree 6, then the degree sequence is either $6, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ or $6, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$.

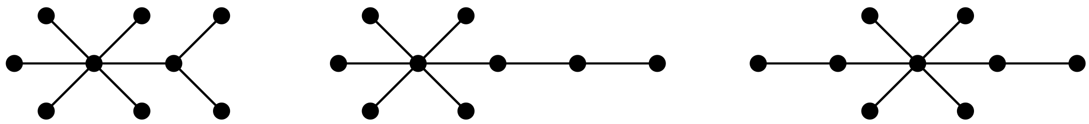
Soln. 頂点を $x_1, x_2, \ldots, x_9$ とし、頂点 x_9 の次数を 6 とする。次数の総数は辺の数の倍になる。木の辺の数は頂点の数から 1 を引いたものだから、9 頂点の木の辺の数は、8 である。Let $x_1, x_2, \ldots, x_9$ be vertices and assume that the degree of x_9 is 6. Since the number of edges of a tree with 9 vertices is 8, and the total number of degrees is 2 times the number of edges. This number becomes 16 in this case. So

$$16 = \deg(x_1) + \deg(x_2) + \cdots + \deg(x_9) = \deg(x_1) + \cdots + \deg(x_8) + 6.$$

従って Hence $\deg(x_1) + \deg(x_2) + \cdots + \deg(x_8) = 10$。連結なので次数はすべて 1 以上だから、次数は、$6, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ であるか $6, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ の何れかである。Since it is connected with at least two vertices, the degree of each vertex is at least 1. Therefore, the degree sequence is either $6, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ or $6, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$.

(b) (a) の条件を満たす木で同型でないものをすべて描いて下さい。Draw all non-isomorphic trees satisfying the conditions in (a).

Soln.



(c) 9 頂点上の 7 正則グラフは、一つも存在しないことを説明して下さい。Explain that there are no 7-regular graphs with 9 vertices.

Soln. 奇数次数の頂点は偶数個ある。もし、9 頂点上の 7 正則グラフがあるとすると、7 という奇数次数の頂点が 9 個あることになり、矛盾である。

There are even number of odd degree vertices. If there is a 7-regular graph with 9 vertices, the number of vertices of degree 7 (odd) is 9 (odd). This is absurd.

(d) 8 点上の 6 正則グラフは、すべて同型であること、すなわち本質的には一種類しかないことを説明して下さい。Explain that all 6 regular graphs with 8 vertices are isomorphic, i.e., there is essentially one 6-regular graph with 8 vertices.

Soln. このグラフの補グラフは、8 頂点上の 1 正則グラフになる。これは、4 つの辺のみのグラフだから、みな同型である。8 頂点上の 6 正則グラフはその補グラフだから、すべて同型である。

The complement of each 6-regular graph with 8 vertices is a 1-regular graph. 1 regular graph consists of 4 edges and all are isomorphic. 6 regular graphs with 8 vertices are all obtained as the complement of this graph and they are isomorphic.

5. Γ は 頂点数が v、辺の数が e、面の数が f である連結な平面グラフである。このとき、命題 p を以下のようにする。 Let Γ be a connected plane graph with v vertices, e edges and f faces. Let p be the following statement on Γ.
p: Γ には、次数が 3 以下の頂点または 3 辺で囲まれている面が存在する。
There is a vertex of degree at most three or a face that is surrounded by 3 edges. (10pts)

(a) 命題 p を背理法で示す。p を否定すると、$2v \leqq e$ かつ $2f \leqq e$ が成立することを説明して下さい。In order to prove p, by way of contradiction, assume p is false. Explain that $2v \leqq e$ and $2f \leqq e$ hold.

Soln. 否定すると、各頂点の次数は 4 以上で、各面は 4 本以上の辺で囲まれていることになる。Proposition 8.2 (i), (ii) から、以下の式が成り立つ。Suppose not. Then the degree of every vertex is at least four and every face is surrounded by at least 4 edges. By Proposition 8.2 (i) and (ii), we have $4v \leqq 2e$, and $4f \leqq 2e$. したがって、Therefore $2v \leqq e$ and $2f \leqq e$.

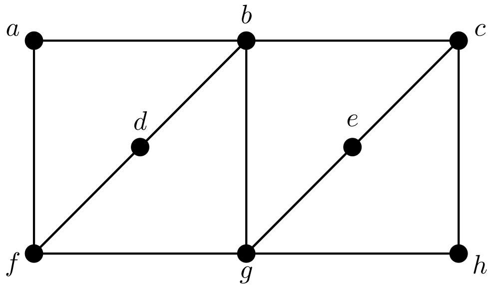
(b) 命題 p が成立することを説明してください。Explain that the statement p holds.

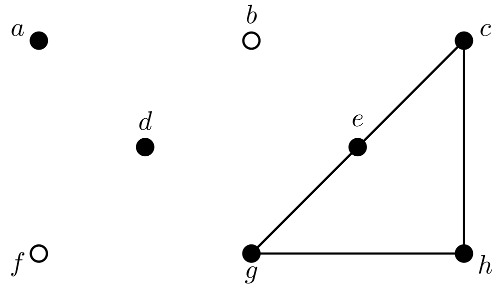
Soln. Theorem 8.1 のオイラーの公式を用いると、下の式より矛盾を得る。By applying the Euler's formula in Theorem 8.1 we obtain a contradiction.

$$2 = v - e + f \leqq \frac{1}{2}e - e + \frac{1}{2}e = 0.$$

6. 下のグラフについて考える。Consider the graph below.

(a) ハミルトングラフではないことを、Theorem 7.3 を用いて説明せよ。S, Δ, $\omega(\Delta)$ が何であるかも明示し、ハミルトングラフではない理由を明記すること。 Show that the graph is not Hamiltonian by applying Theorem 7.3. Describe S, Δ, and $\omega(\Delta)$. (10 pts)





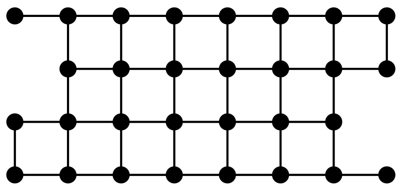
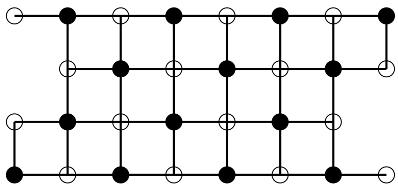
Soln. $S = \{b, f\}$ とする。すると、S を除いてできるグラフ Δ は右上の図のようになる。この連結成分の数は、3 なので、$3 = \omega(\Delta) > |S| = 2$. Theorem 7.3 より、ハミルトングラフでは、どんな S をとっても $\omega(\Delta) \leqq |S|$ が成立しなければならないから、このグラフはハミルトングラフではない。

Let $S = \{b, f\}$, and let Δ be a graph obtained by deleting vertices in S and edges containing a vertex in S. Then Δ becomes as depicted above on the right. Since the number of connected components of Δ is three, we have $3 = \omega(\Delta) > |S| = 2$. By Theorem 7.3, if Γ is Hamiltonian, $\omega(\Delta) \leqq |S|$ must hold for any choice of S. This graph is not a Hamilton graph.

(b) ある二頂点を辺で結ぶと（新たに辺として加えると）、Hamilton グラフになる。それは、(i) どの頂点とどの頂点か。記号で答えよ。また、(ii) ハミルトン閉路を頂点の記号で示せ。If we connect two vertices of the graph by an edge, then it becomes a Hamilton graph. (i) Which are the two vertices? (ii) Write a Hamilton circuit by the labels of vertices.

(i) d, e. (ii) $a, b, d, e, c, h, g, f, a$ (Hamilton Circuit)

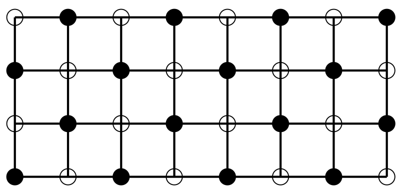
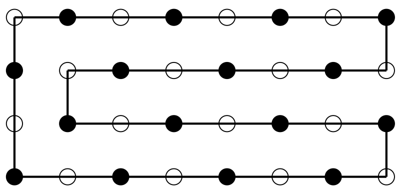
7. (a) 下のグラフは、すべての頂点を縦か横の隣接したペアに分割 できない ことを説明して下さい。Explain that it is impossible to partition the vertices of the graph below into vertical or horizontal pairs of adjacent vertices.

Soln. 右上のように、頂点を白黒とすると、縦か横のペアにすると、かならず、黒一個と白一個のペアになることがわかる。しかし、白 16, 黒 14 で数が一致していないので、全てを白と黒のペアにすることはできない。

Color the vertices of the graph in black and white as above. Then both vertical and horizontal adjacent pairs consist of one black and one white vertex. Observe that there are 16 whites and 14 blacks. So it is impossible to pair up all vertices in this way.

(b) 下のグラフは、どの白い頂点を一つと黒い頂点一つを取り除いても、縦か横の隣接したペアに分割 できる ことを説明して下さい。Explain that it is possible to partition the vertices of the graph below into vertical or horizontal adjacent pairs of vertices no matter which of the two vertices, one black and one white, are removed.

Soln. 右上の図のように、このグラフはハミルトン閉路がある。この閉路から、白一つ黒一つ取り除くと、すべてつながった一つの路か、二つの路に分かれるが (Theorem 7.3 より連結成分は 2 個以下) 取り除いたのが、白一つ黒一つなので、黒からはじまり白、または、白から始まり黒となっているため、長さは偶数である。したがって、白黒の隣接したペアにすることができる。

There is a Hamilton circuit as drawn above on the right. If two vertices, one black and one white, are removed, it will become one path or two paths. Since one black and one white are removed, the path starts from a white and ends at a black or starts from a black and ends at a white. Therefore the length of these paths are even, and they can be partitioned into pairs of adjacent vertices.

8. 重さが $1, 3, 9, 27, 81$ グラムのおもり (weight) がそれぞれ一つずつある。これを用いて天秤 (scale) で、1 グラム刻みで $1, 2, 3, \ldots, 121$ グラムの重さを量ることができることを示したい。There are 5 weights of $1, 3, 9, 27, 81$ grams. We want to show that one can weigh a thing of 1 to 121 grams in 1 gram increments using a balance scale.

eg. x を計りたいものとして、左に 1g, 3g のおもりと、x をのせ、右に 9 g のおもりをのせ釣り合ったら、x は 5 g であることが判る。When one wants to weigh x, put 1 g and 3 g weights and x on the letft and 9 g weights on the right. If it balances, x is of 5 g.

(a) 以下の重さを量るときには、どのように、天秤に載せればよいか。When you want to weigh the following, what would you do?

Soln. x を量りたいものとする。Let x be a thing we want to weigh.

i. 40 g Left: x. Right: weights of $1, 3, 9, 27$ grams.

ii. 50 g Left: x and weights of 1, 3 and 27 grams. Right: weights of 81 grams.

iii. 100 g Left: x and weights of 9 grams. Right: weights of $1, 27, 81$ grams.

(b) 1g から 40g までは、1g, 3g, 9g, 27g のおもりを用いて 1g 刻みで量ることができることが判っているとして、41g から 121g の間の重さも、$1, 3, 9, 27, 81$ g のおもりを用いて、1g 刻みで量ることができることを説明して下さい。Suppose you know the way to weigh 1g to 40g in 1 gram increments using 4 weights, 1g, 3g, 9g and 27g. Explain that it is possible to weigh 41 to 121 grams in 1 gram increments using a balance scale.

Soln. 81g の時は、81g のおもりを使えばよいから、次の二つの場合にわける。

Case 1. 41g から 80g の場合。x を q gram とすると、$1 \leqq 81 - q \leqq 40$ となる。左に、x, 右に、81g のおもりを載せれば、これは、右に、$81 - q$ gram のものを載せたのと同じなので、仮定から、釣り合うように、$1, 3, 9, 27$g のおもりをのせることができる。

Let x be q grams with $41 \leqq q \leqq 80$. Then $1 \leqq 81 - q \leqq 40$. Put x on the left and a weight of 81 g on the right. This can be regarded as the situation that a thing with $81 - q$ grams is on the right. By hypothesis, we ban balance it using weights of $1, 3, 9, 27$ grams.

Case 2. 82g から 121g の場合。x を q gram とすると, $1 \leqq q - 81 \leqq 40$ となる。左に、x, 右に、81g のおもりを載せれば、これは、左に、$q - 81$ gram のものを載せたのと同じなので、仮定から、釣り合うように、$1, 3, 9, 27$g のおもりをのせることができる。

Let x be q grams with $82 \leqq q \leqq 121$. Then $1 \leqq q - 81 \leqq 40$. Put x on the left and a weight of 81 g on the right. This can be regarded as the situation that a thing with $q - 81$ grams is on the left. By hypothesis, we can balance it using weights of $1, 3, 9, 27$ grams.