数学の世界 (World of Mathematics) *November 14, 2008*

Final Exam 2008

Division: ID#: Name:

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある定理などの番号または、その内容を明記すること。

1. p, q, r を命題とする。 (15pts)

(a) 次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r.$$

p	q	r	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

[**判定と理由**]

(b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。

Points

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Total

(c) 論理的な誤解が生じないよう注意して、以下のことを文章で表現せよ。
「Γ がハミルトングラフならば、どの頂点を取り除いても連結である。」の対偶。

2. 頂点の数が 8 で連結な 5-正則グラフ (どの頂点の次数も 5 であるグラフ) Γ を考える。(15pts)

(a) Γ は 3 種類ある。すべて描き、それらがすべてであることを簡単に説明せよ。

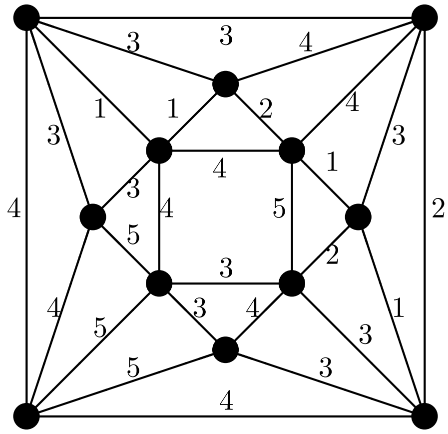
(b) Γ は 3 種類どの場合も平面的グラフではないことを説明せよ。

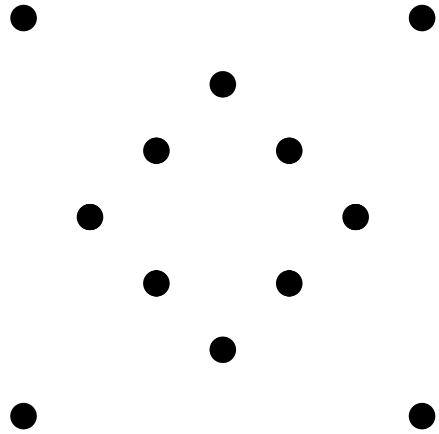
3. 次の数を求めよ。どのように求めるかも簡単に説明せよ。 (10pts)

   (a) $4096 = 2^{12}$ を 2 以上の 4 個 の自然数の積としてあらわす。積の順序も考慮に入れると何通りの表し方があるか。${}_nC_m$ を用いて答えよ。たとえば $4\times64\times8\times2$ と $64\times8\times4\times2$ は異なるものと数える。

   (b) A, B, C, D の 4 つのチームから 12 人の代表選手を選ぶことになった。チーム毎の代表の数に関して何通りの可能性があるか。

4. 下の 12 の点を結ぶネットワークを作る。辺の数字は、その線の建設費を点数で表したものとする。このとき、全ての点が間接的には全てつながり、かつ建設費を最も少なくしたい。建設費の合計点がいくつになるか。また対応する点を結ぶネットワークを右下に図示せよ。(10pts)





合計 (Total)：

5. ある ELP のセクションには、23 人の学生がいた。一年生の ELP の終わりにみなで握手をすることにした。 (10pts)

   (a) どのように工夫しても、全員が丁度 7 人の人と握手するようにすることはできなかった。これはなぜか説明せよ。

   (b) どのように工夫しても、握手をする人数が皆異なるようにする事はできなかった、これはなぜか説明せよ。

6. 4×10 のチェス盤をナイトがナイトの動きをしてすべてのマスを丁度一回まわって元の所に戻ることはできないことを説明せよ。 (10pts)

7. S さんは学内の駅伝大会に出場するために、トレーニングとして毎日一周 2.5 キロの外周道路を走り、毎日何周したかを記録することにした。走るのは大会までの丁度 40 日間。毎日最低 1 周はしたが、合計では 75 周に少し足りなかった。記録を見てみると、なんと丁度 100 キロ走った期間があった。これは驚くべき事ではなく、必ずそのような期間があることを説明せよ。ただし走ったのは $1, 2, 3, \ldots$ 周などで、3.5 周などは無い。また、期間とは、i 日目から j 日目といったもので、一周 2.5 キロとして計算したものである。 (10pts)

8. n を自然数 $(1, 2, 3, \ldots)$ する。このとき「外見同一の 3^n 個のおもりがあり、そのうち、一つだけ重さが違って、それが重いことが分かっている。天秤を n 回使うと、かならず、その 1 つのおもりを発見できる。」ことを数学的帰納法を用いて示して下さい。 (10pts)

メッセージ （「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write “Do Not Post.”）

1. この授業の目的を最初に考えていたことの何パーセント達成できたか。(a) 論理的思考・数学的思考を体験すること。(b) 一つの数学の世界を垣間見ること。(c) 数学を楽しむこと。

   (a) (b) (c)

2. この授業について。改善点について。

3. 数学について。その他何でもどうぞ。

数学の世界 (World of Mathematics) *November 14, 2008*

Solutions to Final Exam 2008

以下の問題において授業で扱った Theorem, Proposition を用いる時は、Handout にある定理などの番号または、その内容を明記すること。

1. p, q, r を命題とする。 (15pts)

(a) 次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r.$$

p	q	r	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	r
T	T	T		$\boldsymbol{T}$		T			T		$\boldsymbol{T}$	T
T	T	F		$\boldsymbol{F}$		F			T		$\boldsymbol{F}$	F
T	F	T		$\boldsymbol{T}$		T			F		$\boldsymbol{T}$	T
T	F	F		$\boldsymbol{T}$		T			F		$\boldsymbol{T}$	F
F	T	T		$\boldsymbol{T}$		T			F		$\boldsymbol{T}$	T
F	T	F		$\boldsymbol{T}$		F			F		$\boldsymbol{T}$	F
F	F	T		$\boldsymbol{T}$		T			F		$\boldsymbol{T}$	T
F	F	F		$\boldsymbol{T}$		T			F		$\boldsymbol{T}$	F

[**判定と理由**]

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ の真理値と $(p \wedge q) \Rightarrow r$ の真理値が p, q, r の真理値によらず常に等しいので、$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ が成立する。

(b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。

解：$x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$ および $\neg x \vee \neg y \vee \neg z \equiv \neg(x \wedge y \wedge z)$ を用いると、

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg(\neg r) \equiv \neg(p \wedge q \wedge \neg r).$$

別解： 上の真理表から $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ は p, q, r の真理値がそれぞれ T, T, F のときだけ F でそれ以外の時、T という真理値をとる。従って、その否定は、p, q, r の真理値がそれぞれ T, T, F のときだけ T でそれ以外の時、F という真理値をとる。 したがってそれは $p \wedge q \wedge \neg r$ と論理同値である。したがって、$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \neg(p \wedge q \wedge \neg r)$ を得ることもできる。 ■

(c) 論理的な誤解が生じないよう注意して、以下のことを文章で表現せよ。

「Γ がハミルトングラフならば、どの頂点を取り除いても連結である。」の対偶。

解：「ある一頂点を取り除くと連結でなくなるグラフはハミルトングラフではない。」

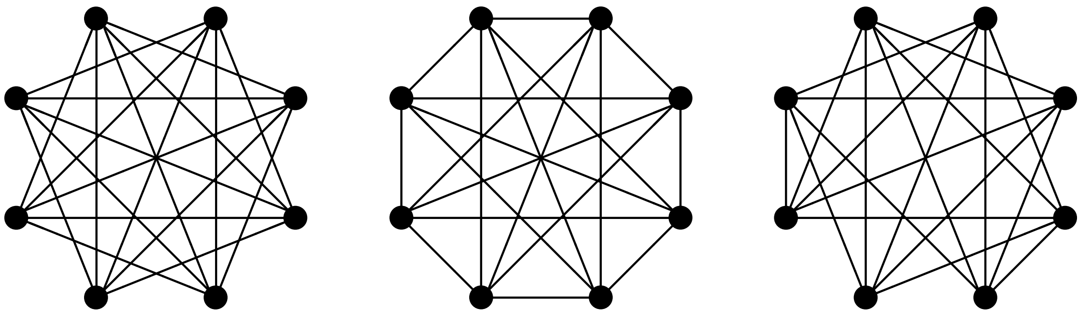
または

「どの頂点を取り除いても連結であるという性質を持たなければ、そのグラフはハミルトングラフではない。」 ■

2. 頂点の数が 8 で連結な 5-正則グラフ (どの頂点の次数も 5 であるグラフ) Γ を考える。(15pts)

(a) Γ は 3 種類ある。すべて描き、それらがすべてであることを簡単に説明せよ。

解：Γ の隣接していない 2 頂点を辺としたグラフ（補グラフという）は 2 正則グラフになる。(5 正則グラフであるときは、各頂点はその頂点をのぞき隣接していないのは、常に 2 頂点 $(8-1-5=2)$ だからである。）連結な 2 正則グラフはある 3 以上の整数 n について n 辺形だから、8 頂点の 2 正則グラフは、8 辺形、4 辺形二つ、または 5 辺形と 3 辺形の三種類である。最初の 5 正則グラフ Γ は、これらの 2 正則グラフの隣接してない頂点どうしを辺としたグラフ（補グラフ）である。したがって、以下の三通りである。左から順に、8 辺形の補グラフ、4 辺形二つの補グラフ、5 辺形と 3 辺形の補グラフである。



(b) Γ は 3 種類どの場合も平面的グラフではないことを説明せよ。

解：頂点の数 $v=8$, 各頂点の次数は 5 だから辺の本数 $e=5\cdot 8/2=20$ である。ここで平面グラフに描けたとすると、オイラーの公式より、面の数 f は

$$f=e-v+2=20-8+2=14$$

となる。面を $F_1, F_2, \ldots, F_{14}$ とし、それぞれの面を囲む (境界の) 辺の数を $n_1, n_2, \ldots, n_{14}$ とする。各面は、三本以上の辺で囲まれているので、$n_1 \geq 3, n_2 \geq 3, \ldots, n_{14} \geq 3$ である。Proposition 8.2 (ii) の式を用いると

$$40=2\cdot e=n_1+n_2+\cdots+n_{14} \geq 3\cdot 14=42$$

となり、これは矛盾である。したがって、頂点数 8 の連結な 5-正則グラフは平面的ではない。 ■

3. 次の数を求めよ。どのように求めるかも簡単に説明せよ。 (10pts)

   (a) $4096 = 2^{12}$ を 2 以上の <u>4 個</u> の自然数の積としてあらわす。積の順序も考慮に入れると何通りの表し方があるか。${}_nC_m$ を用いて答えよ。たとえば $4\times64\times8\times2$ と $64\times8\times4\times2$ は異なるものと数える。

   解：$4096 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$ を四つの 2 以上の自然数の積としてあらわすのだから、それは、11 個ある $\times$ の中から 3 個の $\times$ を選ぶ組合せの数と等しい。従って、その数は、

$${}_{11}C_3 = \frac{11\cdot10\cdot9}{3\cdot2\cdot1} = 165$$

   である。次の例を参照。

$$4\times64\times8\times2 = (2\times2)\times(2\times2\times2\times2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times2$$

■

   (b) A, B, C, D の 4 つのチームから 12 人の代表選手を選ぶことになった。チーム毎の代表の数に関して何通りの可能性があるか。

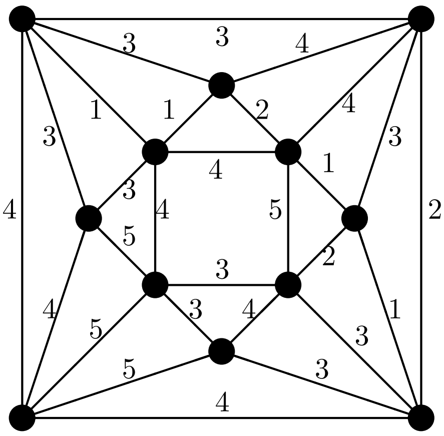
   解：16 人 $(12+4)$ の代表選手を各チーム最低一人選ぶことにしても同じだから（最初に一人ずつ配当しそれ以外の 12 人の代表を偉物悪寒が得れば同じ）、16 の枠をならべておいて、その 15 個の隙間の、間に、3 個のしきりを入れる数と同じで、基本的には前問と同じになる。したがって、その数は

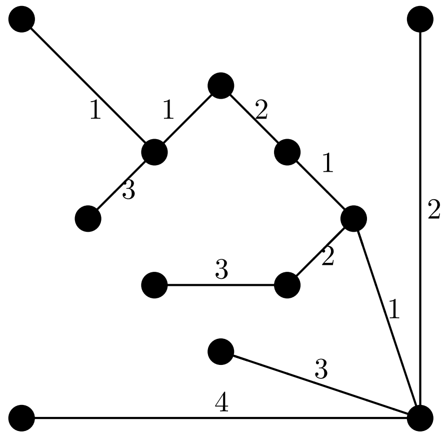
$${}_{12+4-1}C_{4-1} = {}_{15}C_3 = \frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2\cdot1} = 455$$

   である。

4. 下の 12 の点を結ぶネットワークを作る。辺の数字は、その線の建設費を点数で表したものとする。このとき、全ての点が間接的には全てつながり、かつ建設費を最も少なくしたい。建設費の合計点がいくつになるか。また対応する点を結ぶネットワークを右下に図示せよ。(10pts)

   解：最適木アルゴリズムを用いると一つの解は右下のようになる。解はたくさんあるが、合計点は同じ。





合計 (Total)：23

5. ある ELP のセクションには、23 人の学生がいた。一年生の ELP の終わりにみなで握手をすることにした。 (10pts)

   (a) どのように工夫しても、全員が丁度 7 人の人と握手するようにすることはできなかった。これはなぜか説明せよ。

   解：Theorem 5.1 により頂点の次数の総和は辺の数の 2 倍で偶数となる。もし、全員が丁度 7 人の人と握手するとすると、23 頂点で次数がすべて 7 のグラフが対応するが、総次数 23×7 は奇数なのでそのようなグラフは存在しない。

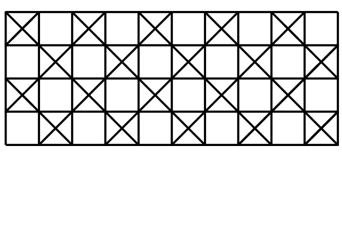
   別解： 一人一人が握手した人数の総数は、握手の総数の 2 倍になる。一人一人が握手した人数の総数はこの状況では 23×7、これは奇数なので、握手の総数の二倍つまり偶数ではないので、このようにする事はできない。 ■

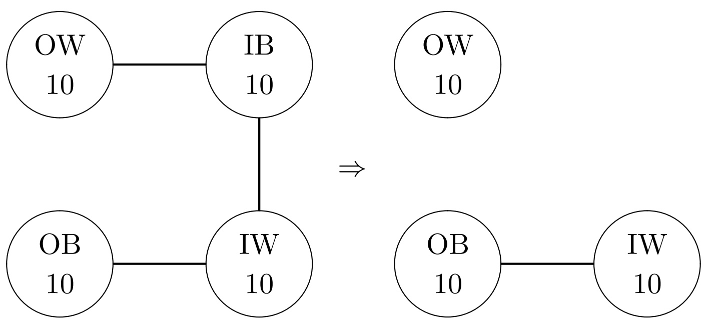
   (b) どのように工夫しても、握手をする人数が皆異なるようにする事はできなかった、これはなぜか説明せよ。

   解：握手する人数は最大で 22 人、最小で 0 で、全部で 23 通りである。もし、握手する人数がみな違うとすると、このすべての場合がないといけない。特に 22 人全員と握手した人も、だれとも握手しなかった人もいるはずである。22 人全員のなかには、誰とも握手しなかった人も含まれなければいけないので、不可能である。したがって、握手をする人数が皆異なるようにする事はできない。 ■

6. 4×10 のチェス盤をナイトがナイトの動きをしてすべてのマスを丁度一回まわって元の所に戻ることはできないことを説明せよ。 (10pts)

解：チェス盤を左下の図のように、市松模様にぬる。すると、ナイトは黒のマスからは白のマス、白のマスからは黒のマスにしか移動することはできない。そこで、外側（上下）と中側（中央）の二列ずつにわけ、外側の白を OW、外側の黒を OB、内側の白を IW、内側の黒を IB とする。これらはそれぞれ、10 マスずつある。これらを頂点とするグラフを考える。辺は、ナイトが移動できるマスに対応する頂点を結ぶものとする。OW からは IB にしか移動できず、OB からは IW にしか移動できないから、OW と OB の間には辺はない。そこで、IB に対応する 10 の頂点を取り除くと、OW に対応する頂点からは、辺は一つも出ていないので、それぞれ一頂点で連結成分になっている。IW, OB の頂点も存在するから、連結成分の個数は全体で 11 以上ある。11 頂点を取り除いたグラフの連結成分の個数が 11 なので、Theorem 7.3 により、このグラフはハミルトングラフではない。すなわち、ナイトがナイトの動きをしてすべてのマスを丁度一回まわって元の所に戻ることはできない。 ■





7. S さんは学内の駅伝大会に出場するために、トレーニングとして毎日一周 2.5 キロの外周道路を走り、毎日何周したかを記録することにした。走るのは大会までの丁度 40 日間。毎日最低 1 周はしたが、合計では 75 周に少し足りなかった。記録を見てみると、なんと丁度 100 キロ走った期間があった。これは驚くべき事ではなく、必ずそのような期間があることを説明せよ。ただし走ったのは $1, 2, 3, \ldots$ 周などで、3.5 周などは無い。また、期間とは、i 日目から j 日目といったもので、一周 2.5 キロとして計算したものである。 (10pts)

   解：100 キロとは 1 周 2.5 キロだから、40 周を意味する。そこで、丁度 40 周する期間があることを示す。また、全体では、75 周に満たなかったと言うことは、40 で割り切れる周回数する期間があることを示せば、丁度 40 周する期間があることが分かる。40 の倍数は 40, 80, 120, 等であるからである。

   さて、i 日目までの周回数を b_i とする。まず、これらのうちのいずれかが、40 で割り切れている場合を考えると上で述べたように、75 未満の 40 の倍数は 40 だけだから、1 日目から i 日目までの周回数が 40 すなわち、丁度 100 キロ走ったことになる。次に、$b_1, b_2, \ldots, b_{40}$ はすべて 40 で割り切れない場合を考える。すると余りは 1〜39 だから、鳩ノ巣原理によって、$b_1, b_2, \ldots, b_{40}$ を 40 で割ったあまりで等しいものがあることになる。それを、$b_i = 40p + r$, $b_j = 40q + r$ とし $i < j$ とする (r は余りで p, q は商)。すると、$b_j - b_i = 40(q - p)$ となるが、$b_j - b_i$ は $i + 1$ 日目から j 日目までに走った周回数だから、これで丁度 40 周、または距離が 100 キロである期間があることが分かった。 ■

8. n を自然数 $(1, 2, 3, \ldots)$ する。このとき「外見同一の 3^n 個のおもりがあり、そのうち、一つだけ重さが違って、それが重いことが分かっている。天秤を n 回使うと、かならず、その 1 つのおもりを発見できる。」ことを数学的帰納法を用いて示して下さい。 (10pts)

   解：数学的帰納法でしめす。$n = 1$, 3 個のおもりの時は、そのうちの二つを天秤に載せる。どちらかが下がれば、それが重いおもりである。どちらも下がらなければ、残りの一つが重いおもりであることが分かる。したがって、$n = 1$、3^1 のおもりの場合は一回天秤を使うことで、一つだけ重いおもりを見つけることができる。

   $n = k$ の時、すなわち 「外見同一の 3^k 個のおもりがあり、そのうち、一つだけ重さが違って、それが重いことが分かっているとき天秤を k 回使うと、かならず、その 1 つのおもりを発見できる。」ものとする。$n = k + 1$ のときは、3^{k+1} 個のおもりを 3^k 個ずつ三つに分ける。その二つを天秤に載せる。すると、この三つのグループのうち、どれに、重いおもりが入っているかが分かる。もし、天秤の一方が下がれば、そのグループに重いおもりが入っているし、釣り合えば、載せなかったグループのおもりに重いおもりが入っていると分かるからである。重いおもりが入っているグループは 3^k 個のおもりなので、帰納法の仮定より k 回天秤を使うことで、重いおもりを見つけることができる。すなわち、最初の一回とあわせて、$n = k + 1$ すなわち、3^{k+1} 個のおもりの時も $k + 1$ 回天秤を用いることで、一つだけ重さが違って重いおもりを見つけることができる。

   したがって、すべての自然数 n について、「外見同一の 3^n 個のおもりがあり、そのうち、一つだけ重さが違って、それが重いことが分かっている。天秤を n 回使うと、かならず、その 1 つのおもりを発見できる。」ことが示された。

   注： 無論現実的には不可能です。重くなりすぎると天秤は使えないからです。しかし、原理的には、この方法で、その天秤で量れるどんな数の場合にも、その重さが違って重いおもりを見つけることができます。 ■