数学 B 数学の世界 (The World of Mathematics) *November 20, 2006*

Final Exam 2006

Division: ID#: Name:

1. p, q, r を命題とする。(Let p, q, r are propositions.) (10pts)

   (a) 次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。(Decide whether the following holds by completing the truth table below. And write your conclusion with reason.)

$$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge (\neg r)) \Rightarrow q.$$

p	q	r	$p \quad \Rightarrow \quad (q \quad \vee \quad r)$	$(p \quad \wedge \quad (\neg \quad r)) \quad \Rightarrow \quad q$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

   [**判定と理由 (Conclusion and reason)**]

   (b) $p \Rightarrow (q \vee r)$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。(Express $p \Rightarrow (q \vee r)$ using $\neg$, $\wedge$ and parentheses. Do not use $\Rightarrow$ or $\vee$.)

Points

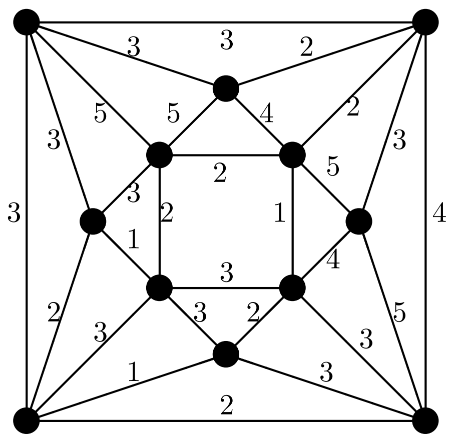
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

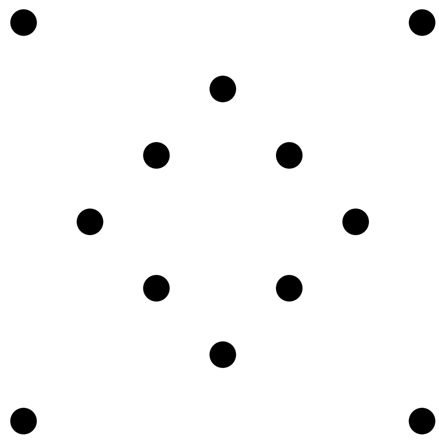
2. 次の数を求めよ。どのように求めるかも簡単に説明せよ。(Find the following and explain your reasoning.) (10pts)

   (a) 50 チームでトーナメント戦を行なう。引き分けはないものとする。優勝チームを決めるためには、何試合が必要か。(50 teams are in a tournament. If there is no draw, how many games are required to decide the winner of the touranment? Why?)

   (b) 1000 羽鶴を A, B, C, D, E の 5 人で折ることにした。ただし、一人が最低 100 羽折る。この、5 人がそれぞれ何羽折るかの可能性は、全部で何通りあるか。${}_nC_m$ を用いて答えよ。(How many ways are there to make 1000 paper cranes by five people, A, B, C, D, E, if each one makes at least 100? Use ${}_nC_m$ to express your answer.)

3. 下の 12 の点を結ぶネットワークを作る。辺の数字は、その線の建設費を点数で表したものとする。このとき、全ての点が間接的には全てつながり、かつ建設費を最も少なくしたい。建設費の合計点がいくつになるか。また対応する点を結ぶネットワークを右下に図示せよ。(Find the minimum cost of a connected network using the diagram below. Draw your network on the right as well by connecting corresponding points.) (10pts)





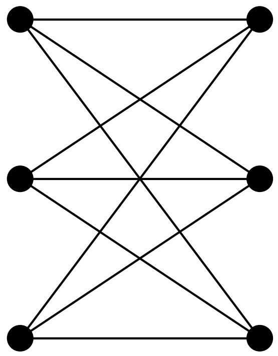
合計 (Total)：

4. 8×8 のチェス盤について考える。チェス盤は、白と黒に市松模様に塗られている。(An 8×8 chess board has checkered pattern in black and white.) (10pts)

   (a) 右上と左下のマス以外すべてを 1×2 の長方形を縦または横におくことによって重ならないように敷き詰めることはできないことを示せ。(Show that it is impossible to cover all squares of the board except the top right and the bottom left corners by 1×2 rectangular plates without overlapping.)

   (b) 白 2 マスと、黒 2 マスを指定する。これらの 4 マスの指定の仕方によっては、それ以外のマスを 1×2 の長方形を縦または横におくことによって重ならないように敷き詰めることはできないことを示せ。(Show the following. If we choose two white squares and two black squares properly, it is impossible to cover the rest of the board by 1×2 rectangular plates without overlapping.)

5. $K_{3,3}$（下の図参照）は平面的グラフではないことを証明せよ。(Show that $K_{3,3}$ below is not a planar graph.) (10pts)

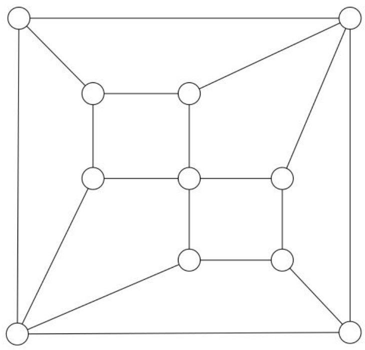


6. A さんはあるパーティーに参加した。そこには A さんを含め、全員で 20 人の人の出席者がいた。パーティーの最後に A さんが参加者に握手した人数を聞くと、全員と握手した人はないことと、みな握手の相手の人数が違うことが判明した。(Ms. A attended a party. There were 20 people including Ms. A. After some period, Ms. A asked the attendants how many people they shook hands with. All of them answered different numbers, and none of them shook hands with all.) (10pts)

   (a) A さんは必ず一人とは握手していることを説明せよ。(Explain that Ms. A shook hands with at least one of them.)

   (b) 丁度 2 人と握手した人がおりこの人が握手した相手は、丁度 18 人と握手した人と、丁度 17 人と握手した人であることを説明せよ。(Explain that there is a person who shook hands with exactly two persons, and they are the ones who shook hands with exactly 18 and 17 people.)

7. 次のグラフはハミルトングラフではないことを証明せよ。(Show that the graph below is not a Hamilton graph.) (10pts)



8. $\Gamma = (X, E)$ を頂点の数が v、辺の数が e であるような木であるとする。(Let $\Gamma = (X, E)$ be a tree with v vertices and e edges.) (10pts)

   (a) $v \geqq 2$ ならば、かならず次数が 1 の点が存在することを示せ。(Show that if $v \geqq 2$, there is a vertex of degree 1.)

   (b) この時、$e = v - 1$ であることを数学的帰納法で証明せよ。(Show by Mathematical Induction that $e = v - 1$.)

9. 連結な平面グラフで、各頂点の次数が 3 で、各面が 4 辺形か、6 辺形であるものを考える。今、4 辺形の数を m とする。また頂点の個数を v、辺の個数を e、面の個数を f とする。(Γ is a connected plane graph such that each vertex is of degree 3 and each face is surrounded by either four edges or six edges. Suppose there are m faces surrounded by four edges, and Γ has v vertices, e edges and f faces.) (10pts)

   (a) $3f = e + m$ が成立することを示せ。(Show that $3f = e + m$.)

   (b) m を決定せよ。答えだけではなく、決定の道筋も説明せよ。(Determine m. Show work!)

10. B さんは、77 日間連続で練習をし、一日最低 1 ゲームはし、合計で 132 ゲームを越さないようにする。「ある期間のゲーム数の合計が丁度 77 ゲームになることが必ずある。」ことを示せ。(Mr. B played games 77 consecutive days. Suppose he played at least one game each day but the total number of games is at most 132. Show that there is a certain consecutive period he played exactly 77 games. By a certain consecutive period, we mean for example, from the 3rd day to the 57th day.) (10pts)

メッセージ （「ホームページ掲載不可」は明記のこと。If you wish, write "Do Not Post."）

1. この授業について。改善点について。
2. この授業の目的をそれぞれ何パーセント達成できたか。(a) 論理的思考・数学的思考を体験すること。(b) 一つの数学の世界を垣間見ること。(c) 数学を楽しむこと。
3. 数学について。その他何でもどうぞ。

数学 B 数学の世界 (The World of Mathematics) *November 20, 2006*

Solutions to Final Exam 2006

1. p, q, r を命題とする。(Let p, q, r are propositions.) (10pts)

   (a) 次の式が成り立つかどうかを、下の真理表を完成することによって判定せよ。理由も記せ。(Decide whether the following holds by completing the truth table below. And write your conclusion with reason.)

$$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge (\neg r)) \Rightarrow q.$$

p	q	r	p	$\Rightarrow$	$(q$	$\vee$	$r)$	$(p$	$\wedge$	$(\neg$	$r))$	$\Rightarrow$	q
T	T	T		$\boldsymbol{T}$		T			F			$\boldsymbol{T}$	
T	T	F		$\boldsymbol{T}$		T			T			$\boldsymbol{T}$	
T	F	T		$\boldsymbol{T}$		T			F			$\boldsymbol{T}$	
T	F	F		$\boldsymbol{F}$		F			T			$\boldsymbol{F}$	
F	T	T		$\boldsymbol{T}$		T			F			$\boldsymbol{T}$	
F	T	F		$\boldsymbol{T}$		T			F			$\boldsymbol{T}$	
F	F	T		$\boldsymbol{T}$		T			F			$\boldsymbol{T}$	
F	F	F		$\boldsymbol{T}$		F			F			$\boldsymbol{T}$	

[**判定と理由 (Conclusion and reason)**]
解：判定：成り立つ。　　理由：真理値がすべて等しいから。

   (b) $p \Rightarrow (q \vee r)$ を $\neg$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。これらは、何度使っても良いが、$\Rightarrow$ と $\vee$ は使わないこと。(Express $p \Rightarrow (q \vee r)$ using $\neg$, $\wedge$ and parentheses. Do not use $\Rightarrow$ or $\vee$.)

解：上で示したことを利用すると、

$$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge (\neg r)) \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge (\neg r)) \vee q \equiv \neg((p \wedge (\neg r)) \wedge (\neg q))$$

別解. 求める論理式の真理値は一カ所だけ F であとは、T だからその否定は、一カ所だけ T であとは、F。T の場所は p が T, q が F, r が F だから、求めるものは、

$$\neg(p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r))$$

となる。 ■

2. 次の数を求めよ。どのように求めるかも簡単に説明せよ。(Find the following and explain your reasoning.) (10pts)

   (a) 50 チームでトーナメント戦を行なう。引き分けはないものとする。優勝チームを決めるためには、何試合が必要か。(50 teams are in a tournament. If there is no draw, how many games are required to decide the winner of the touranment? Why?)

   解：1 試合毎に 1 チーム負けると考えると、49 の敗者をきめるためには、49 試合必要。したがって、49 試合。 ■

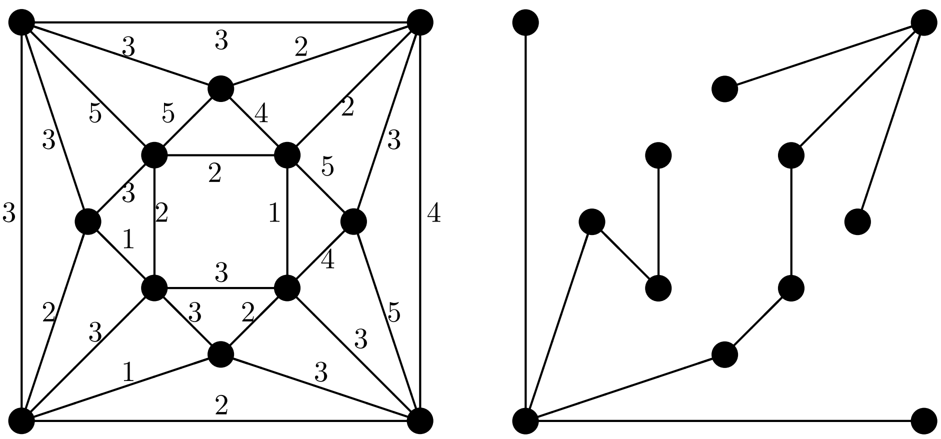
   (b) 1000 羽鶴を A, B, C, D, E の 5 人で折ることにした。ただし、一人が最低 100 羽折る。この、5 人がそれぞれ何羽折るかの可能性は、全部で何通りあるか。${}_nC_m$ を用いて答えよ。(How many ways are there to make 1000 paper cranes by five people, A, B, C, D, E, if each one makes at least 100? Use ${}_nC_m$ to express your answer.)

   解：それぞれ 99 羽折ったところから考えると、残りの $1000 - 99 \times 5 = 505$ 羽の鶴を、5 人で最低一羽ずつ分けるのだからその方法は（505 個のキャラメルを最低一個ずつ 5 人の兄弟で分けるのと同じだから)、

$${}_{504}C_4$$

   通りである。 ■

3. 下の 12 の点を結ぶネットワークを作る。辺の数字は、その線の建設費を点数で表したものとする。このとき、全ての点が間接的には全てつながり、かつ建設費を最も少なくしたい。建設費の合計点がいくつになるか。また対応する点を結ぶネットワークを右下に図示せよ。(Find the minimum cost of a connected network using the diagram below. Draw your network on the right as well by connecting corresponding points.) (10pts)



合計 (Total)：解：21 (上の最適木の選び方は多数)

4. 8×8 のチェス盤について考える。チェス盤は、白と黒に市松模様に塗られている。(An 8×8 chess board has checkered pattern in black and white.) (10pts)

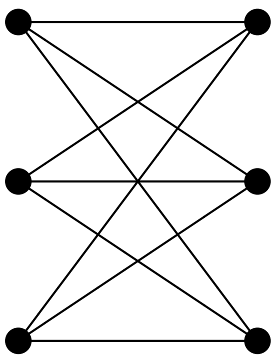
   (a) 右上と左下のマス以外すべてを 1×2 の長方形を縦または横におくことによって重ならないように敷き詰めることはできないことを示せ。(Show that it is impossible to cover all squares of the board except the top right and the bottom left corners by 1×2 rectangular plates without overlapping.)

   解：右上が黒だとすると、左下も黒。したがって、これらをのぞくと、全体で黒が 30、白が 32 となる。1×2 の長方形で覆われるのは黒 1 と白 1 だから、すべて右上と左下以外すべて覆われたとすると、覆われる黒と白のマスの数は等しい。しかし、ここではそれらは異なるので、不可能である。 ■

   (b) 白 2 マスと、黒 2 マスを指定する。これらの 4 マスの指定の仕方によっては、それ以外のマスを 1×2 の長方形を縦または横におくことによって重ならないように敷き詰めることはできないことを示せ。(Show the following. If we choose two white squares and two black squares properly, it is impossible to cover the rest of the board by 1×2 rectangular plates without overlapping.)

   解：左上は白、右上は黒だとすると、左上の白の右と下はどちらも黒、それを取り除き、右上の黒の左と下を取り除くと、白 2 マス、黒 2 マス除いたことになる。しかし、右上、左上は、孤立しており、敷きつめられることはない。 ■

5. $K_{3,3}$（下の図参照）は平面的グラフではないことを証明せよ。(Show that $K_{3,3}$ below is not a planar graph.) (10pts)



解：点の数は $v = 6$、辺の数は $e = 9$。平面的グラフだと仮定し、平面グラフに描けたとすると、オイラーの公式より、$v - e + f = 2$ だから $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ となる。5 つの面は、それぞれ n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 で囲まれているとする。このグラフは、長さが 3 の閉路が無いから、$n_1 \geqq 4$, $n_2 \geqq 4$, $n_3 \geqq 4$, $n_4 \geqq 4$, $n_5 \geqq 4$ である。Proposition 8.2 (ii) を用いると、

$$18 = 2 \cdot e = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 \geq 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20.$$

これは矛盾である。従って、このグラフは平面的グラフではない。 ■

6. A さんはあるパーティーに参加した。そこには A さんを含め、全員で 20 人の人の出席者がいた。パーティーの最後に A さんが参加者に握手した人数を聞くと、全員と握手した人はないことと、みな握手の相手の人数が違うことが判明した。(Ms. A attended a party. There were 20 people including Ms. A. After some period, Ms. A asked the attendants how many people they shook hands with. All of them answered different numbers, and none of them shook hands with all.) (10pts)

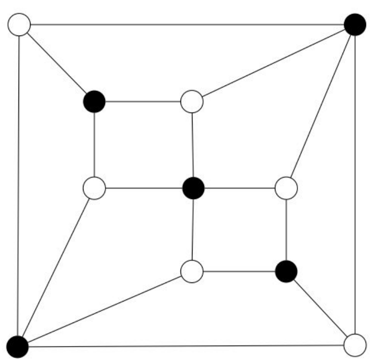
   (a) A さんは必ず一人とは握手していることを説明せよ。(Explain that Ms. A shook hands with at least one of them.)

   解：握手の相手の人数の最大数は自分以外の数でこの場合は、19 であるが、全員と握手した人がいないので、最大は、18 で、最少は 0 である。すなわち、19 通り。A さんが 自分以外の 19 人に聞いたら異なる答えをしたということは、A さん以外の中に、全く握手しなかった人、丁度一人と握手した人、丁度二人と握手した人、. . .、丁度 17 人と握手した人、丁度 18 人と握手した人がいることになる。丁度 18 人と握手した人（A さんではない）は、A さん以外の中にいる一回も握手しなかった人以外とは、全員と握手したことになる。したがって、A さんとも握手したことになり、A さんは必ず一回は握手していることになる。 ■

   (b) 丁度 2 人と握手した人がおりこの人が握手した相手は、丁度 18 人と握手した人と、丁度 17 回握手した人であることを説明せよ。(Explain that there is a person who shook hands with exactly two persons, and they are the ones who shook hands with exactly 18 and 17 people.)

   解：前問の解の中で A さん以外に丁度 2 人と握手した人がいることを示した。丁度 18 人と握手した人は、一人とも握手しなかった人以外とはすべてと握手しているので、丁度 2 人握手した人とも握手している。また、丁度 18 人と握手した人は丁度 1 人と握手した人とも握手している。したがって、丁度 17 人と握手した人は、だれとも握手していない人、および丁度一人と握手した人と自分以外のすべての人と握手していることになる。すなわち、丁度 2 人と握手した人は、A さん以外で丁度 18 人と握手した人と、丁度 17 人と握手した人とだけ握手したことになる。（上の議論から A さんも、丁度１８人と握手した人も、丁度 17 人と握手したひとも A さんでは無いこともわかる。）

7. 次のグラフはハミルトングラフではないことを証明せよ。(Show that the graph below is not a Hamilton graph.) (10pts)



解：左の図の黒い点、すなわち、右上と、左下、それ以外に左上から右下への対角線の左上と右下以外の 3 点を取り除くと、全部で 5 点取り除くことになるが、残りの 6 点はすべて孤立しており、連結成分の個数は 6 となるので、Theorem 7.3 によってハミルトングラフではない。

別解. 上で指定した 5 点を黒、それ以外の 6 点を白とすると、このグラフは黒と白のみが隣接している、Bipartite グラフであることが分かる。ハミルトン閉路は、黒と白同数含まれるので、このグラフには、ハミルトン閉路はない。すなわち、ハミルトングラフではない。 ■

8. $\Gamma = (X, E)$ を頂点の数が v、辺の数が e であるような木であるとする。(Let $\Gamma = (X, E)$ be a tree with v vertices and e edges.) (10pts)

   (a) $v \geqq 2$ ならば、かならず次数が 1 の点が存在することを示せ。(Show that if $v \geqq 2$, there is a vertex of degree 1.)

   解：すべての次数は 2 以上だとする。すると、各点に異なる点が隣接しているから、$x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim \cdots$ で、$x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_4, \ldots$ となるものをとっていける。グラフは有限個の点からなるから、どこかで同じ点が現れる。すなわち、閉路を持つ。木は閉路と持たないから、これは、矛盾。したがって、必ず次数 1 の点を持つ。 ■

   (b) この時、$e = v - 1$ であることを数学的帰納法で証明せよ。(Show by Mathematical Induction that $e = v - 1$.)

   解：v に関する帰納法で示す。$v = 1$ のときは、$e = 0$ だから $e = v - 1$ が成立する。$v = k$ のときは、どのような木も 辺の数は、$v - 1$ であると仮定する。$v = k + 1$ とする。$v \geq 2$ だから (a) によって、次数 1 の点が存在する。この点を取り除いたグラフを考える。これは、点の数は、$v - 1 = k$、辺の数は、もともと e とすると $e - 1$、で閉路はない。二点をとり、それらを結ぶ元々のグラフ（Γ）の中での路を考える（Γ は木で、連結だから、必ずそのような路はある）と、路上の点は、次数が 2 以上だから、取り除いた点を含まない。すなわち、取り除いたグラフでもこれらを結ぶ路はあることになり、連結である。すなわち、一点を取り除いたグラフも木になる。点の数は k だから帰納法の仮定により、辺の数 $e - 1$ は $k - 1$ となる。したがって $e = k = v - 1$ となり、$v = k + 1$ のときも成立することが分かった。したがって、すべての自然数 v について点の数が v の木の辺の数は $v - 1$ であることがしめされた。 ■

9. 連結な平面グラフで、各頂点の次数が 3 で、各面が 4 辺形か、6 辺形であるものを考える。今、4 辺形の数を m とする。また頂点の個数を v、辺の個数を e、面の個数を f とする。(Γ is a connected plane graph such that each vertex is of degree 3 and each face is surrounded by either four edges or six edges. Suppose there are m faces surrounded by four edges, and Γ has v vertices, e edges and f faces.) (10pts)

   (a) $3f = e + m$ が成立することを示せ。(Show that $3f = e + m$.)

   解：4 辺形は m 個、6 辺形は $f - m$ 個だから Proposition 8.2 (ii) によって、

   $$4m + 6(f - m) = 2e.$$

   これから、$3f = e + m$ を得る。 ■

   (b) m を決定せよ。答えだけではなく、決定の道筋も説明せよ。(Determine m. Show work!)

   解：Proposition 8.2 (i) より $3 \cdot v = 2e$、(a) から $3f = e + m$ だから Theorem 8.1 のオイラーの定理より、式を 3 倍しておくと、

   $$6 = 3v - 3e + 3f = 2e - 3e + e + m = m$$

   したがって、$m = 6$ を得る。 ■

10. B さんは、77 日間連続で練習をし、一日最低 1 ゲームはし、合計で 132 ゲームを越さないようにする。「ある期間のゲーム数の合計が丁度 77 ゲームになることが必ずある。」ことを示せ。(Mr. B played games 77 consecutive days. Suppose he played at least one game each day but the total number of games is at most 132. Show that there is a certain consecutive period he played exactly 77 games. By a certain consecutive period, we mean for example, from the 3rd day to the 57th day.) (10pts)

解：b_1 で一日目のゲーム数、b_2 で二日目までのゲーム数、...、 b_{77} で 77 日までのゲーム数を表すものとする。仮定から、

$$1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_{77} \leq 132.$$

Case 1. $b_1, b_2, \ldots, b_{77}$ のいずれかが 77 で割り切れるとき。

それを b_i とすると、$1 \leq b_i \leq 132$ だから 77 の倍数ならば、$b_i = 77$ となり、i 日目までのゲーム数のトータルが丁度 77 となる期間であることが分かる。

Case 2. $b_1, b_2, \ldots, b_{77}$ のどれも 77 で割り切れないとき。

b_1 から b_{77} のそれぞれを 77 で割った商を p_1 から p_{77}、余りを r_1 から r_{77} とすると、$b_1 = 77p_1 + r_1, \ldots, b_{77} = 77p_{77} + r_{77}$ と書くことができる。どれも 77 で割り切れないということは、77 で割った余りが、0 ではないということだから、$1 \leq r_1 \leq 76, \ldots 1 \leq r_{77} \leq 76$。したがって、77 個の余りはすべて 1 から 76 の間にあるから、鳩の巣原理によって、余りが同じ二数があることが分かる。それを b_i, b_j とし、$b_i > b_j$ とする。すると、$b_i = 77p_i + r_i$, $b_j = 77p_j + r_j$ で、$r_i = r_j$ だから $b_i - b_j = 77(p_i - p_j)$ となる。これは、$b_i - b_j$ が 77 の倍数であることを示す。これも、132 以下だから $b_i - b_j = 77$ であることが分かる。これは、i 日目までの試合数から、j 日目までの試合数を引いたものだから、$j + 1$ 日目から i 日目までの試合数が合計で丁度 77 試合であることが結論できた。

したがっていずれの場合も、丁度 77 試合行う期間がある。 ■