Linear Algebra II *February 26, 2007*

Final からみる線形代数学 II

ここでは Solutions には書かなかった解説を書きます。Solutions と並べて理解してください。

線形独立性：　まずは、何回も出てくる Linear Independence 線形独立性について。これは、方程式がたくさん並んでいても本質的にはいくつの関係式かを知るために必要な性質ですし、また、いくつかのベクトルで張られる（span される）空間が本質的に何種類の方向を持っているかなどを表すために必要な概念です。ただ、この定義がわかりにくいと思います。$S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} \subset V$ が一次独立であるとは、

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

を満たすことであると定義しています。実は、本来の趣旨からは、$\boldsymbol{v}_1$ はほかのベクトルの一次結合ではない、$\boldsymbol{v}_2$ もほかのベクトルの一次結合ではない、. . .、$\boldsymbol{v}_m$ も他のベクトルの一次結合ではない、という意味なのですが、そうすると、一次独立かどうかを確かめるのに、それぞれ最低でも m 個の条件を確かめなければいけなくなります。それを確かめやすくするためには、上の条件を確かめればよい。つまり上の条件と同値であることがわかるので（Proposition 4.1 (5.3.1, 5.4.1)）上のように一回ですべてを確かめられるいわば、コンパクトな条件にしてあるのです。

次元に関する定理：　次の定理は n 次元と次元がわかっているとき空間のベクトルの集合に関する定理です。つまり n 個のベクトルからなる基底が一組あることがわかっているとき、たとえば $\boldsymbol{R}^n$ は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ という標準基底がありますから、このような空間についての定理です。むろん、$\boldsymbol{R}^n$ でなくてももっと一般のベクトル空間（10 個の公理を満たすもの）であっても、$\boldsymbol{R}^n$ や一般のベクトル空間の部分空間であっても（部分空間は 10 個の公理を満たす線形空間でしたから）成立する定理です。線形代数学 II の核となる定理の一つです。

In the following if you use a theorem, state it. As for the following theorem, state which item (a) - (d) is applied.

Theorem 1 *Let V be an n-dimensional vector space, and S a set of vectors in V.*

(a) *Suppose S has exactly n vectors. Then S is linearly independent if and only if S spans V.*

n 次元空間 V の中のベクトルの集合 S が基底となるためには、二つの条件、一次独立性と、V のベクトルはすべて S のベクトルの一次結合でかけることが必要ですが、(a) は、 S が次元と同じ n 個のベクトルからなる場合は、二つの条件の一方を満たせば、基底になることを主張しているものです。なぜなら、一次独立なら、$V = \mathrm{Span}(S)$、逆に $V = \mathrm{Span}(S)$ ならば一次独立、つまり一方が示されれば、他方もつねに成り立つと言っているからです。

鍵は、n 次元ベクトル空間の n 個（次元と同じ数）のベクトルである点です。基底だと示すには二つの条件を示さなければなりませんが、全体の次元がわかっているときには、その次元と同じ個数のベクトルをとり、それが、一次独立かまたは、全体を *Span* していることをいえばそれでいいよといっています。証明が簡単になります。今回の問題では、Problem 3 (a) でこれが使えます。

(b) *If S spans V but not a basis for V, then S can be reduced to a basis for V by removing appropriate vectors from S.*

(b) と (c) は S のベクトルの数が n とは限らない、または、$\dim V$ が有限ではあっても、わからない場合の命題です。たとえば有限次元ベクトル空間の部分空間は (d) により有限次元ですが、次元がわからない、そのとき、基底を作るにはどうしたらよいかということを主張しています。$V = \mathrm{Span}(S)$ となっていても、今度は、S のベクトルの数と V の次元が等しいかどうかわかりませんから、(a) が使えず、基底になるとは限りません。しかし、$V = \mathrm{Span}(S)$ とすると、S からいくつかベクトルを減らして、基底を作ることができることを主張したものです。実際には、基底の二つめの条件は満たしているわけですから、基底ではないということは、一次独立ではないということです。すると、S のベクトルのどれかは、他のベクトルの一次結合で書くことができるので、それは、取り除いてもよいということを言っているのです。それを取り除いて、一次独立になるまでベクトルと減らしていける。そして基底に到達することを主張しています。

(c) *If S is linearly independent that is not already a basis for V, then S can be enlarged to a basis of V by inserting appropriate vectors into S.*

こちらは一次独立だけど、$V = \mathrm{Span}(S)$ となっていなかったらどうかということを取り扱う命題です。つまり、$V \neq \mathrm{Span}(S)$ とすると（$\mathrm{Span}(S) \subset V$ は明らかですから、V のベクトルで S のベクトルの一次結合ではかけないものがある時ということです）、V のベクトルで S のベクトルの一次結合でかけないものが存在します。そのようなベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると、そのベクトルを S に加えても、一次独立です。これを証明するのが、Problem 2 (b) です。これを認めれば、そのようにして、S にベクトルを付け加え S_1、それが $\mathrm{Span}(S_1) = V$ ならば S_1 は一次独立で、*Span* の条件も満たすから基底、もし、$\mathrm{Span}(S_1) \neq V$ ならさらにもう一個付け加えてと、次々加えていけば、いつか、基底になることを主張しています。

これは基底の存在にも利用できます。最初空集合から始めても良いですが、ちょっとへんな感じがするので、V に一つ零でないベクトルと取るとします。すると、これは一次独立です。ですからこのベクトルを含む、基底が必ずとれると言っているわけです。

(d) *If W is a subspace of V, then $\dim(W) \leq \dim(V)$. Moreover if $\dim(W) = \dim(V)$, then $W = V$.*

これは次元が部分空間の「大きさ」を測る尺度としてよいものだと言うことを主張しています。つまり、部分空間なら全体の次元より小さい（かまたは等しい）。もし部分空間で次元が等しければ全体と一致することを主張したものです。この命題からわかるもう一つのこととして、V の次元が n つまり有限次元であれば、その部分空間も有限次元で基底が存在することを主張しています。これを根拠に、部分空間の基底を構成することができます。

1. Let V be an inner product space. Suppose $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ is a set of nonzero orthogonal vectors in V.

   (a) Show that S is a linearly independent set. (10 pts)

   証明問題はまず仮定と結論を明確にすることから始めます。この場合には、

   仮定：(1) V は内積が定義されたベクトル空間。(2) S は直交する 0 でないベクトルの集合。

結論：S は一次独立。

そこで、(1) と (2) を使って、(3) を証明します。いくつか方法がありますが、Solution に書いたのとは別の方法にしましょう。一次独立を言いたいので、

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}. \quad (*)$$

と仮定します。これから条件を使って $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ がいえれば、S が一次独立であることの条件を満たしていることがわかるわけです。さて、内積空間であるところがまず鍵ですから、内積を使う。

$$\langle k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n, k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n\rangle \qquad (**)$$

を計算するとどうなるでしょうか。これは、仮定 $(*)$ から、$\langle\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}\rangle$ と同じはずです。この値は内積の性質から、0 になります。$\boldsymbol{0}$ ではありません。この違いがわかりますか。内積の値は実数でした。なお、$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = \|\boldsymbol{v}\|^2$ は後でも出てきますが、物理などでも、これを $\boldsymbol{v}^2$ と書くことがあります。しかし、今回は、そのように書いたものは間違いにしました。理由は、それは、通常のユークリッド内積つまり、$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ について、$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$ のとき表す時に使うもので、それを一般化した、Definition 6.1 の 4 つの条件を満たす、内積を表す記号ではないのと、$\boldsymbol{v}^2$ があると $\boldsymbol{v}^3$ はなどという勘違いを起こすことを懸念して、その記号を使わなかったからです。

では、 $(**)$ を計算してみましょう。内積の線形性（和は和にわかれ、定数倍は外に出ると表現されるものです。Definition 6.1 (b), (c) と (a) を用いて二番目のベクトルについても (b), (c) と同様の性質を満たすというものです）を使うと、$k_ik_j\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle$ の形のものが たくさん出てきてその和になります。よくわからない場合は $n = 3$ ぐらいで具体的に計算してみてください。さて、二番目の条件から、$i \neq j$ のときは、$\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle = 0$ となります。つまり直交していますから、上のものは、

$$0 = k_1^2\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1\rangle + k_2^2\langle\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2\rangle + \cdots + k_n^2\langle\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_n\rangle$$

となります。ここで、$k_i^2\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i\rangle$ の形の数の和になっていますが、$k_i^2 \geq 0$ で、$\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i\rangle > 0$ です。最初の方は k_i が実数ですからあたりまえですが後の方は、内積の定義 Definition 6.1 (d) の後半、つまり $\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$ であれば、$\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i\rangle > 0$ だという内積の定義からでることです。 すなわち、各項が $k_i^2\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i\rangle \geq 0$ で、その和が 0 ですから、すべて 0 でないといけません。$\langle\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i\rangle > 0$ でしたから、$k_i^2 = 0$ すなわち、$k_i = 0$ が $i = 1, 2, \ldots, n$ について成り立つことがわかり、最初の目的が達せられました。すなわち、

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

が示されたので、S は一次独立です。

なかなか難しいですね。最初から思いつくことは難しいです。教科書やノートの証明を見ながら、細かいところを理解して、証明の核となることをつかむのです。ある意味では暗記する部分もあります。しかし、証明全体を暗記するのではなく、論理を覚えるのです。すると、次の時も、発展した形で使えるようになります。

(b) In addition assume that $\|\boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = \|\boldsymbol{v}_3\| = \|\boldsymbol{v}_4\| = \sqrt{2}$. Evaluate (5 pts)

$$\left\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4)\right\|.$$

これは、内積や長さの性質が使えるかを見る問題です。次のような間違いが多くありました。上の式から続けて、

$$= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4\| = \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{v}_1\| + \|\boldsymbol{v}_2\| + \|\boldsymbol{v}_3\| + \|\boldsymbol{v}_4\|) = 2\sqrt{2}.$$

実は、この場合、最初の等号は正しい。$\|k\boldsymbol{v}\| = |k|\|\boldsymbol{v}\|$ となるからです。たまたまここでは、$\frac{1}{2} > 0$ ですから、$\frac{1}{2}$ を括弧の外に出すことは正しい。norm の性質を見てください。次です。和の norm を norm の和に分けるところ。これは成立しません。これは何も知らないでした間違いとかなり詳しく知っていて間違った両方の場合が考えられます。前者は単に和は分かれるだろうとうる覚えでしたもの。後者は、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が直交しているときには、$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$ が成り立つという一般化されたピタゴラスの定理を誤って使ってしまったというものです。これは、二乗ととったら、$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ となりそうな気がしますが、これは、成り立ちません。これは、$\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$ $k \geq 0$ とかけているときだけ成立します。つまり上のようなことは成り立ちません。そんな細かい定理をちゃんとは覚えられないという人が多いと思います。私もむろん覚えられません。わたしはどうするかというと、定義だけ覚えておくのです。そして定義にもどってつねに考える。$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$ ですから、上の計算も、この norm の二乗を地道に計算するところから始めるのです。Solution もそのようにしてあります。

(c) Find the rank of the following matrix (5 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

上級生にこれは、Linear I の問題ではないですかと言われてしまいました。確かにそうです。私は、Linear II で習う rank + nullity 定理を使った解答を書いておきましたが、基本は、既約ガウス行列を行の基本変形で得ればそれから、rank は 3 だとわかります。次の問題と連携させて始めて、Linear II の問題になるのですね。むろん、この問題は、既約ガウス行列から求めて何も問題ありませんが。

(d) Determine whether the following set of vectors is linearly independent. (5 pts)

$$\{\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4,\ \boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_1\}.$$

Solution に書いたものが一番早いですが、むろん、ふつうに、線形独立性の定義から解くこともできます。

$$k_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) + k_2(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3) + k_3(\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4) + k_4(\boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{0},$$

として、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ について整理すると

$$(k_1 - k_4)\boldsymbol{v}_1 + (k_2 - k_1)\boldsymbol{v}_2 + (k_3 - k_2)\boldsymbol{v}_3 + (k_4 - k_3)\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$$

となりここで、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が (a) より一次独立であることを用いて、係数がすべて 0 となるので、

$$k_1 = k_4,\ k_2 = k_1,\ k_3 = k_2,\ k_4 = k_3$$

これから $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ となります。ここでこれをすべて 0 として一次独立と書いた人もたくさんいましたが、これは、一次独立かどうかを決めよとい

う問題で、これがでたのですから、$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ などとおいて、みればよいわけです。

自分で計算して示したことに、自信をもたなくてはいけません。科学の世界は正直な世界です。こじつけや、論理のギャップによるメッキがはがれるのが数学です。無理をしてはいけません。真理は、自分の思いとは違うかもしれません。人は信じていることと違った真理を突きつけられたときに試されるのではないでしょうか。

2. Let $T : V \to W$ be a linear transformation from an n-dimensional vector space V to an m-dimensional vector space W. Let $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ be a linearly independent set of vectors in V and $\boldsymbol{w}_1 = T(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{w}_2 = T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{w}_s = T(\boldsymbol{v}_s)$. Let

$$U = \mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}.$$

(a) Show that U is a subspace of V. (5 pts)

仮定はいろいろとあります。しかし結論は、U が部分空間であることです。それを示すには、Theorem 3.2 (5.2.1) を使うのでした。すなわち、和とスカラー倍に関して U が閉じていることを示すのでした。式で書くと

$$\text{(a) } \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U \Rightarrow \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in U, \text{ (b) } \boldsymbol{u} \in U, k \in \boldsymbol{R} \Rightarrow k\boldsymbol{u} \in U.$$

$T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = T(\boldsymbol{u}_1) + T(\boldsymbol{u}_2), T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u})$ を示した人もいましたが、T が線形写像であることを示すならば、 まさにこの条件を示すのですが、T が線形写像 (linear transformation) であることはわかっていますから、これを用いて、上の (a), (b) を示すことになります。結論では、$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in U$ や $k\boldsymbol{u} \in U$ を示すのですが、それには、U に属する条件がわからないといけません。それは、U の定義、すなわち、$U = \mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ です。つまり結論を得るには、$T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{0}$ や $T(k\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ を示すことです。これを示すことができれば、U の定義の条件、つまり $|$ の右に書いてある条件を満たしているので、U に属していることがわかります。どのようにしたら示せるでしょうか。それには、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ という条件を用いるわけです。これはどういう条件かというと、$T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{0}$、$T(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{0}$ だということが U の定義からわかります。そのことを良く考えて、Solution の証明を読んでみてください。途中で $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ や $k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ が出てきますが、前者は Definition 3.1 の 4、後者は、Proposition 5.1 (5.1.1) (a) です。

(b) Suppose that $\boldsymbol{v} \in V$ satisties that $\boldsymbol{v} \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s)$. Show that $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}\}$ is linearly independent. (10 pts)

仮定は $\boldsymbol{v} \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s)$ かつ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ が一次独立。

結論は $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}\}$ が一次独立。

さて、結論を示すには、

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{v}_s + k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_s = k = 0.$$

これも、証明をよく理解しておくようにと言った命題の一つです。$k = 0$ がいえれば、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ が一次独立であることから、$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ がいえます。では $k \neq 0$ だったらどうでしょうか。これは、$k \neq 0$ より k で割ると、$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ の一次結合で表せるので、仮定に反する訳です。これでストーリーができましたから、あとは順序立てて説明すること、すなわち、どの順序で説明するのがよいかを考えて組み立てる「証明」です。Solution を

見てください。考える筋道と、説明する筋道は異なります。ここに書いたのは考え方。Solution に書いてあるのが証明です。Solution をみているだけでは考え方がなかなか見えてこないのはそのためです。授業ではですから、考え方を中心に話し、証明は、Lecture Note や Solutions to Quizzes で示していたつもりです。

(c) Suppose that $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s) \cap U = \{\boldsymbol{0}\}$. Show that $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ is linearly independent. (10 pts)

一番難しいと私が考えていた問題です。結論は、$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ が一次独立であることですから、

$$k_1\boldsymbol{w}_1 + k_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0.$$

を示せばよいわけです。条件 $k_1\boldsymbol{w}_1 + k_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0}$ を書き直してみると、$\boldsymbol{w}_1 = T(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{w}_2 = T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{w}_s = T(\boldsymbol{v}_s)$ に注意すると、$\boldsymbol{0} = k_1T(\boldsymbol{v}_1) + k_2T(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_sT(\boldsymbol{v}_s)$ となりますが、右辺は T が線形写像であることを用いれば、$T(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{v}_s)$ となります。つまりこれが $\boldsymbol{0}$ ですから、あるベクトルを T で写した結果が $\boldsymbol{0}$ すなわち $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{v}_s \in U$ であることがわかります。ここで、この問題の仮定をみると、U に入るだけではなく 、$\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s)$ にも入っていれば $\boldsymbol{0}$ になるという条件を使えることがわかります。確かに、$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{v}_s$ は $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s)$ にも入っています。すると、仮定からそのようなベクトル、すなわち、U と $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s)$ の両方に入っているようなベクトルは $\boldsymbol{0}$ だけなので、$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{0}$ がわかります。

$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ は一次独立でしたから、結論の、$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ が言えて証明が終わります。ここまでをよく理解して、自分で証明を書いてみてください。そのあとで、Solution を見てみてください。

この問題は、$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ が一次独立であることを示すのですが、それをどうにか $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}$ が一次独立であることの条件に持ち込んで示すという問題です。難しい問題だと思いますが、できた人も何人かいました。

3. Let $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ be a linear transformation, $A = [T]$ the standard matrix of T given below, and $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2$ the column vectors of A.

$$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We consider four sets of vectors: $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, the standard basis of $\boldsymbol{R}^3$, $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, where $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ are given above, $S = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$, the set of column vectors of A, and $S' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, the orthonormal basis of $\boldsymbol{R}^3$ to be constructed in (b). You may use the fact that B is actually a basis of $\boldsymbol{R}^3$ and $A\boldsymbol{v}_1 = 6\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_2$ and $A\boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{v}_3$. To give your answer, show work and give your reason.

(a) Show that $S = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ is a basis of $\boldsymbol{R}^3$. (10 pts)

最初に書きましたが、いろいろな方法があります。しかしいずれにせよ、Linear Algebra II の核になる問題ですから、できて欲しかったです。一番、基本的な示し方は、一次独立性と $\boldsymbol{R}^3 = \mathrm{Span}(S)$ を示すことです。一次独立性は、既約ガウス行列を求めれば、よいですし、連立一次方程式でも示すことができま

す。 $\boldsymbol{R}^3 = \mathrm{Span}(S)$ も連立一次方程式を解いて示す事ができます。それで示してもよいですが、せっかく理論を学んだのですから、なにか賢い方法でできるとよいですね。一つは最初の Theorem 1 (a) を使う方法です。丁寧に、問題文に、B は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることは使ってもよいと書いてありますから、$\boldsymbol{R}^3$ の次元が 3 であることも使えます。次元は基底を構成するベクトルの数でしたから。つまり $\dim(\boldsymbol{R}^3) = 3$ を用いれば、一次独立か $\boldsymbol{R}^3 = \mathrm{Span}(S)$ のどちらか一方を示せばよいことがわかります。他には、行列式などを用いて、A が可逆行列であることを示せば、それで、簡単に、一次独立性も $\mathrm{Span}(S) = \boldsymbol{R}^3$ であることも示せます。授業では解説しなかった、後者つまり、A の可逆性を用いる方を Solution に書いておきました。両方の証明と、その関連をよく理解してください。

(b) Using the basis S, find an orthonormal basis $S' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ of $\boldsymbol{R}^3$ with respect to the usual Euclidean inner product by the Gram-Schmidt process. Note that $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_2$. (10 pts)

グラム・シュミットの直交化法です。小さい計算ミスは仕方がないとして、これは単純計算です。理屈がわかっていれば、公式を覚える必要もありません。最初のベクトルがすでに、正規直交基底の一部ですから、計算もそれほど難しくないと思ったのですが。これは、Solution のもので十分でしょう。最後にチェックも少なくとも直交しているかのチェックはとても簡単なはずです。

この問題で、$\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$ を求めた人も何人かいました。確かにこれも、正規直交基底ですが、ここで求めるものは、それではありません。$\boldsymbol{u}_1$ は $\boldsymbol{a}_1$ の定数倍（この場合はそのままですが）$\boldsymbol{u}_2$ は $\mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ に入っていて $\boldsymbol{u}_1$ に直交するもの、$\boldsymbol{u}_3$ は $\mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ba_3)$ に入っていて $\boldsymbol{u}_1$ にも $\boldsymbol{u}_2$ にも直交するものを求める。これが、Gram-Schmidt の直交化法です。

最初の $\boldsymbol{e}_2$ が長さ 1 でわかりやすいベクトルですから、$\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ はこれと直交するということは、第二成分は 0 であることがわかります。$\boldsymbol{u}_2$ はどうしても求めないといけませんが、$\boldsymbol{u}_3$ は $\boldsymbol{u}_2$ と直交して、第二成分が 0 ですから $\boldsymbol{u}_3$ は $[-1, 0, 3]^T$ のスカラー倍であることがわかります。計算に持ち込むのは一つの技術であると同時に、計算をしないのも間違いを犯さない大切な技術です。むろん、それを支えるのは理論の理解ですね。

(c) Express each of $\boldsymbol{e}_1$ and $\boldsymbol{e}_3$ as a linear combination of the orthonormal basis S'. (5 pts)

これも連立一次方程式を使って解いた人がほとんどでしたが、実際には計算はいりません。Quiz 7-5 の解答を覚えていますか。正規直交基底の場合は、その一次結合で書くためには連立一次方程式を解かなくてもよいのです。Solution にもあるように、$\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1 \rangle \boldsymbol{u}_1 + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_2 \rangle \boldsymbol{u}_2 + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_3 \rangle \boldsymbol{u}_3.$$

と書けます。係数に現れるもの、$\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ の成分に現れるものと同じですよね。この計算で謎が解けましたか。Solution を見て、どのように求めるのか、実際答えが何になるのか、その数は、どこから来たものなのか、じっくり眺めてください。Quiz 7-5 をも王一度復習してみてください。正規直交基底が、単なる基底と比べて優れている重要な理由です。

(d) Find $[I]_{S',B}$ and $[I]_{B,S'}$, where $I : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ ($\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$) is the identity operator on $\boldsymbol{R}^3$. (10 pts)

一般に、$[T]_{B',B}$ は何だったかを復習しましょう。$T : V \to W$ を線形写像、$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底、$B' = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ を W の基底とし

ます。今、理解したいのは、線形写像という抽象的なものをわかりやすい行列で表す表し方です。それには、V のベクトルや、W のベクトルも抽象的なベクトル空間の要素ではなく、列ベクトルで表したい。それを可能にするのが基底です。たとえば $\boldsymbol{x} \in V$ は V の基底を用いれば、$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表せ（$V = \mathrm{Span}(B)$ を使っています）かつこの表し方は一通りです。すなわち、同じ $\boldsymbol{x}$ を B の一次結合で表すとき $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が他のものでも表せることはないのです（これは B が一次独立であることを使っています。このような事ができるために、基底は、これら二つの条件を満たすことを要求したのでした）。そこで、$[\boldsymbol{x}]_B = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ と表します。これで、V という抽象的なベクトル空間のベクトルを数の並びである $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルとしてより具体的に表すことができました。同じように $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ は W のベクトルですから、W の基底 B' を用いれば、$[T(\boldsymbol{x})]_{B'}$ というものも考えられます。

確認すると、$[\boldsymbol{x}]_B$ は n 個の数のならびで、それは、$\boldsymbol{x}$ を B のベクトルの一次結合で書いたときの係数でした。逆に $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \boldsymbol{R}^n$ に対しては、$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ で $[\boldsymbol{x}]_B = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ となっているものがありますから、この対応は全単射であることがわかります。授業で使った記号を使うと、$T_B : V \to \boldsymbol{R}^n \,(\boldsymbol{x} \mapsto [\boldsymbol{x}]_B)$（これは $\boldsymbol{x} \in V$ に $[\boldsymbol{x}]_B \in \boldsymbol{R}^n$ を対応させる V から $\boldsymbol{R}^n$ への写像という意味でした）が全単射の線形写像であることがわかります。同様に $T_{B'} : W \to \boldsymbol{R}^m \,(\boldsymbol{y} \mapsto [\boldsymbol{y}]_{B'})$ も全単射の線形写像です。すると、$(T_B)^{-1} : \boldsymbol{R}^n \mapsto V$ も線形写像なので、$T_{B'} \circ T \circ T_B : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m ([\boldsymbol{x}]_B \mapsto [T(\boldsymbol{x})]_{B'}])$ が線形写像となり、やっと列ベクトル空間から列ベクトル空間への線形写像ができたので、これを行列で表せるのです。この行列を、$[T]_{B',B}$ と書いたのでした。単純ではありませんが、授業の時に書いた図などを参照しながら、よく理解して下さい。

さらに、この行列 $[T]_{B',B}$ の第 i 列は $[T]_{B',B}\boldsymbol{e}_i$ を計算すればよいが、定義からこれは、

$$T_{B'} \circ T \circ (T_B)^{-1}(\boldsymbol{e}_i) = [T((T_B)^{-1}(\boldsymbol{e}_i)]_{B'} = [T(\boldsymbol{v}_i)]_{B'}$$

となります。つまり、

$$[T]_{B',B} = [[T(\boldsymbol{v}_1)]_{B'}, [T(\boldsymbol{v}_2)]_{B'}, \ldots, [T(\boldsymbol{v}_n)]_{B'}]$$

さて問題を考えましょう。

$$[I]_{S',B} = [[\boldsymbol{e}_1]_{S'}, [\boldsymbol{e}_2]_{S'}, [\boldsymbol{e}_3]_{S'}]$$

ここまでは自動的ですから、この一列目、二列目、三列目が何を意味しているかを、考えて書くわけです。一列目は、$\boldsymbol{e}_1$ を $S' = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ の一次結合で書いたときの係数を縦に（つまり列ベクトルとして）並べたものです。これは、前問ですでにできています。すなわち $\boldsymbol{e}_1$ も $\boldsymbol{e}_2$ も $\boldsymbol{e}_3$ も $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ の線形結合で書けていますから、その係数をそれぞれ縦に並べればよいのです。Solution を確認してください。

次はもっと簡単です。

$$[I]_{B,S} = [[\boldsymbol{u}_1]_B, [\boldsymbol{u}_2]_B, [\boldsymbol{u}_3]_B]$$

これは、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の一次結合で書いてその係数を縦に並べたものですが、落ち着いて考えればそれは、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ そのままであることがわかります。ですから、$[I]_{B,S} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]$ となります。これも答えを見てじっくり確認して下さい。簡単にわかることですが、これらの行列は互いに逆行列になっています。理由も考えてみて下さい。

さらによく見ると、$[I]_{B,S} = [I]^T_{S',B}$ と互いに転置行列になっていました。これがわかっていれば、片方がわかれば、もう一方はすぐ求まります。一般に、$\{bu_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底とします。$U = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$ と並べた行列を考えると、これは、$UU^T = U^TU = I$ となっています。このような行列を直交行列と言います。理由も簡単です。U^TU の i, j 成分は、$\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{u}_j$ だからです。これは、正規直交であることを考えると、$i \neq j$ のとき 0、$i = j$ のとき、1 になっています。そのような行列は I ですから。わかってみれば自然です。逆行列も求めるのがとても大変なものでした。しかし、正規直交基底を並べて作った行列の逆行列はその転置行列なのです。

(e) Express $[T]_{S'}$ using A, $[I]_{S',B}$ and $[I]_{B,S'}$. (5 pts)

これは、Theorem 9.4 (8.5.2) との儘です。Solution を見て下さい。

(f) Find the matrix $[T]_{B'}$ for T with respect to the basis $B' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$. (10 pts)

この問題は答えが問題の中に書かれているようなものでした。問題に、$A\boldsymbol{v}_1 = 6\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_2$ and $A\boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{v}_3$ と書かれています。つまり、これは、$[T(\boldsymbol{v}_1)]_{B'}$, $[T(\boldsymbol{v}_2)]_{B'}$, $[T(\boldsymbol{v}_3)]_{B'}$ がそれぞれ $[6, 0, 0]^T$, $[0, 2, 0]^T$, $[0, 0, -2]^T$ であることを言っているのですから、解はこれを横に並べればおしまいです。

いとも簡単に書きましたが、無論、この線形写像の行列表示や、基底の取り替えは簡単ではありません。是非、ここで良く理解しておいて下さい。基底を取り替えることは、座標系を取り替えるということですから、問題を簡単にするためにとても重要なステップです。

ちょっと長すぎたかな。お疲れさま。この解説少しはお役に立てば嬉しいのですが。本来、期末試験の後に授業をすると、とても良いのですが。そういうシステムにはなっていません。一学期間の感謝を込めて。

H. Suzuki.

URL http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/ *Email: hsuzuki@icu.ac.jp*