Linear Algebra I Final Examination 1997

ID 番号、氏名を、各解答用紙に、また、問題番号も忘れずに書いて下さい。

1. 次のうち正しいものには ◯、誤っているものには × を解答用紙に記入せよ。

   $(a) - (c)$ は、次の連立一次方程式について。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

   (a) $m \leq n$ すなわち方程式の数の方が、未知数（変数）の数よりも多くなければいつでも上の連立一次方程式は解を持つ。

   (b) $m < n$ すなわち方程式の数の方が、未知数（変数）の数よりも少ないとする。このとき解が丁度一組に決まることはない。

   (c) $m < n$ かつ、$b_i = a_{i1}$、$i = 1, 2, \ldots, m$ であるとする。このとき、解は無限個存在する。

   $(d) - (f)$ において、A を以下のような行列とする。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

   (d) AA^t も A^tA もどちらも正方行列である。

   (e) $m < n$ ならば、AA^t は、常に可逆行列である。

   (f) $m = n$、すなわち A は、正方行列とする。このとき、$\det(AA^t) = \det(A)^2$ が常に成立する。

2. A、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{b}$ を次の様にする。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

   (a) A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ。

   (b) 行列の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は、b_1, b_2, b_3 が何であっても解を持つかどうかを判定し、理由を述べよ。もし、ある条件のもとで解を持つときはその条件も求めよ。

   (c) $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ であるときの $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解をすべて求めよ。

   (d) $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ であるときの $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解をすべて求めよ。

3. 次の計算をせよ。

   (a) 順列 $\rho = (3, 7, 2, 1, 4, 6, 5)$ の追い越し数 $\ell(\rho)$ と、符号 $\mathrm{sgn}(\rho)$。

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4. $P(i,j;c) = I + c \cdot E_{i,j}$ （$i, j = 1, 2, 3$、c は実数）を基本行列とする。ただし、I は、3 次単位行列、$E_{i,j}$ は、(i,j) 成分が 1 でそれ以外は、0 である 3 次の行列単位とする。このとき、次の行列を、$P(i,j;c)$ のいくつかの積で表せ。

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$ を次の条件を満たす多項式とする。

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 5,\ f(3) = -1,\ f(5) = -3$$

(a) この多項式を求める方程式を行列方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で表すとき A、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{b}$ を書け。

(b) $|A|$ を求めよ。（公式を用いるときは公式自体も記せ）

(c) $|A| \cdot c_2$ を 4×4 の行列式を用いて表せ。行列式の値は計算しなくて良い。

(d) A の逆行列を A の余因子行列を用いて表せ。成分に現れる行列式の値は求めなくて良い。

6. $X = [x_{i,j}]$ を 3 次正方行列とするとき、$\mathrm{trace}(X)$ は、X の対角成分の和、すなわち、

$$\mathrm{trace}(X) = \sum_{i=1}^{3} x_{i,i} = x_{1,1} + x_{2,2} + x_{3,3}$$

とする。A、B が共に、3 次正方行列であるとき、$\ll A, B \gg = \mathrm{trace}(AB^t)$ とする。

(a) $\ll A, B \gg = \ll B, A \gg$ であることを示せ。

(b) $\ll A, A \gg = 0$ であれば、A は、零行列（成分がすべて零である行列）である。（ただし、行列の成分はすべて実数であるとする。）

鈴木寛@数学教室