7　級数の収束と発散

数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

を級数 (series) という。

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

とし、$\{s_n \mid n = 0, 1, \cdots\}$ （これを、$\{s_n\}$ とも書く）が、s に収束するとき、級数 $\sum a_n$ は収束すると言い

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

と書く。級数が収束すれば $n \to \infty$ のとき、

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - s + s - s_{n-1}| \leq |s_n - s| + |s_{n-1} - s| \to 0$$

だから、a_n は 0 に収束しなければならない。しかし、$|a_n| \to 0$ だからといって、級数が収束するとは限らない。すなわち、これは必要条件である。

例 7.1 等比級数。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2 + \cdots$$

一般に

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k \to s_n = \frac{a_0(1 - r^{n+1})}{1 - r} \to \lim_{n\to\infty} = \frac{a_0}{1 - r},\ \text{if } |r| < 1$$

$|r| > 1$ の時は、発散、$r = 1$ の時は、無限大、$r = -1$ の時は、発散。従って、上の場合は、

$$s_n = \frac{\frac{1}{2}\Big(1 - (\frac{3}{4})^{n+1}\Big)}{1 - \frac{3}{4}} = 2\Big(1 - (\frac{3}{4})^{n+1}\Big) \to 2$$

収束する二つの級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ と、$k \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n,\ \sum_{n=0}^{\infty} k a_n = k\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ。

定義 7.1 各項が負でない実数 $a_n \geq 0$ の級数を正項級数という。級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の各項の絶対値を項とする、正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという。

定理 7.1 絶対収束する級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する。すなわち、$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する。

定理 7.2 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ において、次が成立する。

(1) $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ としたとき、$\{s_n\}$ が有界（すなわち、ある、定数 M について、$s_n < M$）であれば、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は、収束する。

(2) ある定数 $C > 0$ に関して、$a_n \leq Cb_n$ がすべての n について、成立するとする。このとき、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束すれば、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する。

(3) すべての $n \geq N$ に対して、$a_n > 0$、$b_n > 0$ で、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

が成立するとする。このとき、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束すれば、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する。

定理 7.3 (コーシー (Cauchy) の判定法) 数列 a_n に対して、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$ とする。このとき、次が成立する。

(1) $0 \leq A < 1$ ならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は、絶対収束する。

(2) $A > 1$ ならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は、発散する。

証明　n が十分大きいと $\sqrt[n]{|a_n|}$ は A の近くにいるわけだから、ある自然数 N が存在して、$A < r < 1$ となるように r をとると、$n > N$ の時は、いつでも、$\sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$ となっているように N を定めることができる。このとき、$|a_n| \leq r^n$ だから、$|r| < 1$ に注意すると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} r^k \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \frac{r^{N+1}}{1-r} < \infty.$$

従って、(1) の場合は、収束する。(2) の時、発散することは明らか。 ■

定理 7.4 (ダランベール (d'Alembert) の判定法) 数列 a_n に対して、$a_n \neq 0$、

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = B$$

とする。このとき、次が成立する。

(1) $0 \leq B < 1$ ならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は、絶対収束する。

(2) $B > 1$ ならば、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は、発散する。

証明　ある自然数 N が存在して、$n > N$ の時は、いつでも、$|a_{n+1}/a_n| < r < 1$ となっているとする。このとき、$|a_n| < r^{n-N-1}|a_{N+1}|$ だから、

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} r^{k-N-1}|a_{N+1}| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \frac{|a_{N+1}|}{1-r} < \infty.$$

従って、(1) の場合は、収束する。(2) の時、発散することは明らか。 ■

上の二つの定理において、$A = 1$、$B = 1$ の時は、収束、発散は決定できない。

命題 7.5 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は、$p > 1$ の時、収束、$p \leq 1$ の時発散する。

証明　以下の式より、$p > 1$ の時は、収束。

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{N\to\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^N$$

だから、$p > 1$ では有界で収束、$p < 1$ では発散がわかる。$p = 1$ の時は調和級数とよばれ、発散する。それを見るには、

$$t_n = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2}$$

だから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + t_0 + t_1 + t_2 + > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

となり発散する。 ■

例 7.2 $0 < a < 1$ ならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin^2 n$ は、収束する。

$0 \leq a^n \sin^2 n \leq a^n$ だから、

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a^n \sin^2 n \leq \sum_{n=1}^{N} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-a} < \infty.$$

従って、定理 7.2 (1), (2) より、級数は収束する。

例 7.3 $a_n > 0$ ならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は、収束する。

$\sum a_n$ が収束するから、$n > N$ ならば、いつでも、$a_n < 1$ となるような 自然数 N が存在する。このときは、$a_n^2 < a_n < 1$。従って、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{M} a_n^2 &= \sum_{n=0}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{M} a_n^2 < \sum_{n=0}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{M} a_n \\ &< \sum_{n=0}^{N} a_n^2 + \sum_{n=0}^{M} a_n < \infty \end{aligned}$$

従って、定理 7.2 (1) より、級数は収束する。

例 7.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$.

$$\sqrt[n]{(\sqrt[n]{n} - 1)^n} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 0$$

$m = \sqrt[n]{n}$ とすると、$\log m = \frac{1}{n} \log n$ であるから、L'Hospital の定理を用いれば分母分子を微分して、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

より、$n\to\infty$ のとき、$\sqrt[n]{n}\to 1$ となる。分母・分子が無限大になるときの L'Hospital の定理の証明はすこし難しいので、別の証明もあげる。

$n\geq 1$ だから $\sqrt[n]{n}\geq\sqrt[n]{1}=1$。$n\geq 2$ とする。ここで $h_n=\sqrt[n]{n}-1>0$ とおくと、

$$n=(1+h_n)^n\geq 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

だから $h_n^2<2/(n-1)$ となる。したがって、$n\to\infty$ のとき、$h_n^2\to 0$。これは、$\sqrt[n]{n}\to 1$ を意味する。

例 7.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{4n-7}{3n+5}\Big)^n.$

$a_n=\Big(\dfrac{4n-7}{3n+5}\Big)^n$ とする。

$$A=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n-7}{3n+5}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4-\frac{7}{n}}{3+\frac{5}{n}}\right|=\frac{4}{3}>1$$

従って、この級数は、コーシーの判定条件より発散する。ダランベール商は

$$\Big(\frac{4(n+1)-7}{3(n+1)+5}\Big)^{n+1}\Big/\Big(\frac{4n-7}{3n+5}\Big)^n=\Big(\frac{4n-3}{3n+8}\frac{3n+5}{4n-7}\Big)^n\frac{4n-3}{3n+8}\to\frac{4}{3}$$

従って、この級数は、発散する。

例 7.6 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$

このときは、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n(n+1)}=\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\to e>1$$

従って、級数は発散する。

例 7.7 $a_n=\dfrac{(1.0001)^n}{n^5}$

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1.0001}{\sqrt[n]{n^5}}\to 1.0001$$

だから、級数は発散。$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

例 7.8 $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to 1,\ (n\to\infty).$$

従って、これだけでは判定出来ないが、これは、命題 7.5 の $p=3/2$ の場合だから収束する。

以下の事は、有用である。

$$\boxed{\log x<cx^{\frac{1}{k}}\quad e^x>cx^k}$$

8　整級数

定義 8.1 数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = a_0 + a_1 a + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

を、点 0 を中心とする整級数または、巾級数という。このとき $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束するような実数 x の範囲を収束域という。

命題 8.1 (Abel) 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して、
　$|x| < r$ ならば、$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ と、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は、共に収束し、
　$|x| > r$ ならば、$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ と、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が発散するような $0 \leq r \leq \infty$ が存在する。
この r を整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径という。

注　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ を、点 a を中心とした整級数とよぶ。

　巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束を考えるために、$b_n = a_n x^n$ として、考えると、

$$A = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x|$$

ここで、$1/r = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とすると、

$$0 \leq A < 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{|x|}{r} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq |x| < r$$

従って、以下の結果を得る。

命題 8.2 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ において、

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{または、} \left(\frac{1}{r} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$$

ならば、収束半径は r である。ただし、$1/r = \infty$ の時は、$r = 0$、$1/r = 0$ の時は、$r = \infty$ とする。

例 8.1 $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ とすると、

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

だから、収束半径 $r = 1$。

例 8.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!} x^n$ とすると、

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{(2n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{(2n+1)!}} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^n}} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$$

または、

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

従って、収束半径は、$r = \infty$ である。

定理 8.3 整級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r（$0 < r \leq \infty$）とする。このとき、次が成立する。

(1) $|x| < r$ の範囲で、項別微分可能である。

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(2) $|x| < r$ の範囲で、項別積分可能である。

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

(3) a_n は、一意的に定まり、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

例 8.3 $y' - y = -x^3/6$ で、$y(0) = 1$ を満たす関数。

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおき、ある、収束半径で収束するとする。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_n) x^n = -\frac{x^3}{6}$$

これより、$a_1 - a_0 = 0$、$2a_2 - a_1 = 0$、$3a_3 - a_2 = 0$、$4a_4 - a_3 = -\frac{1}{6}$、$(n+1)a_{n+1} - a_n = 0,\ (n > 4)$ を得る。$y(0) = a_0 = 1$ だから、$a_1 = 1$、$a_2 = 1/2$、$a_3 = 1/6$、$a_n = 0,\ (n > 3)$ を得る。すなわち、

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

が、解であることが分かる。この整級数は、多項式で、収束半径は ∞ である。

例 8.4 関数の整級数展開。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

まず、右辺の整級数 $y = f(x)$ の収束半径を求めてみよう。すると、

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

これは、収束半径 r が、∞ であることを示している。かつ、項別微分の定理を用いると、その範囲で、$f'(x) = f(x)$ が成り立っていることが簡単に分かる。

$$\frac{dy}{dx} = y,\ \frac{dy}{y} = dx,\ \log y = x + c,\ y = Ae^x$$

となる。$f(0) = 1$ であることから、$f(x) = e^x$ を得る。上記の微分方程式は、変数分離型と呼ばれるが、次のようにも考えられる。

$$x = \int dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c.$$

例 8.5 $\arctan x$ の整級数展開。

$$\arctan x = \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ (|x| < 1)$$

これは、マクローリン展開、定理 8.3 を用い、漸化式を用いいることによってでも求められるが、複雑である。項別微分定理を用いると、簡単である。

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

は、$|x| < 1$ の範囲で、絶対収束する事、$r = 1$ が収束半径であることから、この範囲で項別積分をすると、$1/(1+x^2)$ の不定積分が、$\arctan x$ であることより、

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

が成り立つ。