4　多変数関数の積分

定義 4.1 $f(x,y)$ を領域 D 上の有界 (bounded) 関数とする。D の分割

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \times \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$$

と、点

$$T_{ij} = (s_{ij}, t_{ij}) \in D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

に対し、リーマン和

$$R_{\Delta,\{T_{ij}\}}(f) = \sum_{1\le i\le m, 1\le j\le n} f(T_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

が、$|\Delta| = \max(|x_i - x_{i-1}| + |y_j - y_{j-1}| \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n) \to 0$ のとき、一定の値に近づくなら、$f(x,y)$ は、D 上積分可能であると言い、その極限値を、$f(x,y)$ の D 上の重積分と言う。これを以下の様に書く。

$$\iint_D f(x,y)d(x,y) = \iint_D f dx = \iint_D f = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

上の定義で、領域 D が、長方形ではないときは、D を含む長方形領域を考え、D の点でないときは、0 と言う値をとるとして、上の定義を当てはめればよい。

以下の様なことが成り立つことが、分かる。

命題 4.1 (1) $\displaystyle\iint_D (f(x,y) + g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy.$

(2) $\displaystyle\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy.$

(3) $D = D_1 \cup D_2$、$D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ならば、

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

命題 4.2 $f(x,y)$ が領域 D 上で、重積分可能ならば、以下が成立する。

(1) $f(x,y) \ge 0$ ならば、$\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy \ge 0$。

(2) S を領域の面積とすると、$m \le f(x,y) \le M$ ならば、

$$mS \le \iint_D f(x,y)dxdy \le MS.$$

(3) $\displaystyle\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy.$

定理 4.3 関数 $f(x,y)$ が有界閉領域 D で連続ならば、重積分が存在する。

定理 4.4 閉区間 $[a,b]$ 上の２つの関数 $g_1(x)$ と、$g_2(x)$ が、連続で、$g_1(x) \le g_2(x)$ とする。領域、

$$E = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

において、２変数関数 $f(x,y)$ が、E 上で、連続ならば、

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right\} dx.$$

例 4.1 $D = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$ とすると、

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+xy+y^2)dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2+xy+y^2)dy\right) dx \\
&= \int_1^2 (x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3)\Big|_0^1 dx \\
&= \int_1^2 (x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3})dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{8}{3} + 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{41}{12}.
\end{aligned}$$

例 4.2 $y = x^2$ と、$y = \sqrt{x}$ で囲まれた領域を D とすると、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (xy+y^3)dy\right) dx &= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^5}{2} - \frac{x^8}{4}\right) dx \\
&= \frac{x^3}{4} - \frac{x^6}{12} - \frac{x^9}{36}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{36} \\
&= \frac{5}{36}
\end{aligned}$$

例 4.3 $D = [0,2] \times [0,1] = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$ とする。

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{1+x+y^2}dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{1}{1+x+y^2}dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\log(1+x+y^2)\right]_0^2 dy \\
&= \int_0^1 (\log(3+y^2) - \log(1+y^2))dy \\
&= \log 4 - \int_0^1 \frac{2y^2}{3+y^2}dy - \log 2 + \int_0^1 \frac{2y^2}{1+y^2}dy \\
&= \log 2 + 6\int_0^1 \frac{1}{3+y^2}dy - 2\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy \\
&= \log 2 + 6\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{y}{\sqrt{3}}\right]_0^1 - 2\left[\arctan y\right]_0^1 \\
&= \log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

例 4.4 $x = \sin y$ と、y 軸上の $0 \le y \le \pi$ の区間。

$$\int_0^1 \left(\int_{\sin^{-1}x}^{\pi - \sin^{-1}x} f(x,y)dy\right) dx = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin y} f(x,y)dx\right) dy.$$

5　重積分の計算

重積分における変数変換を考える。まず、一変数の場合は、

$$\int_a^b f(x)dx,\ x=\phi(t),\ \phi(\alpha)=a,\ \phi(\beta)=b$$
$$\Rightarrow \quad \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

これは、リーマン和で書いたとき、Δ を、分割、$a=x_0,x_1,\ldots,x_n=b$、$|\Delta|=\max\{|x_i-x_{i-1}|\mid i=1,\ldots,n\}$ とし、

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{1\le i\le m} f(u_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{3}$$

の、x_i-x_{i-1} が、

$$x_i-x_{i-1}=\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})=\phi'(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),\ t_{i-1}\le\xi_i\le t_i$$

となることから、得られるのであった。

重積分の時は、どうであろうか。重積分の値も、リーマン和の極限で定義した。すなわち、

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} f(T_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

ここで、$x=x(u,v)$、$y=y(u,v)$ と置くとき、$(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ というような量（この場合は、面積）が、変数変換をしたとき、$(u_i-u_{i-1})(v_i-v_{i-1})$ の何倍になるかが必要である。

この様なことをふまえ、平行四辺形の面積、及び、平行六面体の体積を求める式を考える。

補題 5.1　(1) $(0,0),(a,c),(b,d),(a+b,c+d)$ を頂点とする平行四辺形の面積は、

$$ad-bc=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

の絶対値で与えられる。

(2) $(0,0,0),(a,d,g),(b,e,h),(c,f,i),(a+b,d+e,g+h),(a+c,d+f,g+i),(b+c,e+f,h+i),(a+b+c,d+e+f,g+h+i)$ を頂点とする、平行六面体の体積は、

$$aei+bfg+cdh-ceg-ahf-dbi=\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix} \tag{4}$$

の絶対値で与えられる。

証明　(1) のみ示す。面積を S としたとき、

$$S=2(\frac{1}{2}cd+\frac{1}{2}(b+d)(a-c)-\frac{1}{2}ab)=cd+ba-bc+da-dc-ab=ad-bc$$

を得る。(正確には、どこに点があるかによって、場合分けが必要になってくる。ベクトルを用いると、統一的に表現できる。それが、行列式表示にもなっている。) ■

さて、頂点が、$(u_{i-1}, v_{i-1}), (u_i, v_{i-1}), (u_{i-1}, v_i), (u_i, v_i)$ である、長方形の面積を用いて、頂点が、

$$(x(u_{i-1}, v_{i-1}), y(u_{i-1}, v_{i-1})), (x(u_i, v_{i-1}), y(u_i, v_{i-1})),$$

$$(x(u_{i-1}, v_i), y(u_{i-1}, v_i)), (x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))$$

である、平行四辺形の面積を表すと、例えば、$x(u, v_0) - x(u_0, v_0) = x_u(u', v_0)(u - u_0)$、$u'$ は、u と、u_0 の間の点と表せるから、次の式を得る。

$$\left| \begin{array}{cc} x(u_i, v_{j-1}) - x(u_{i-1}, v_{j-1}) & x(u_{i-1}, v_j) - x(u_{i-1}, v_{j-1}) \\ y(u_i, v_{j-1}) - y(u_{i-1}, v_{j-1}) & y(u_{i-1}, v_j) - y(u_{i-1}, v_{j-1}) \end{array} \right| \tag{5}$$

$$= \left| \begin{array}{cc} x_u(u'_{i-1}, v_{j-1}) & x_v(u_{i-1}, v'_{j-1}) \\ y_u(u''_{i-1}, v_{j-1}) & y_v(u_{i-1}, v''_{j-1}) \end{array} \right| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) \tag{6}$$

これより、次の定理を得る。

定理 5.2 一対一対応の変数変換 $x = \phi(u, v)$、$y = \psi(u, v)$ において、uv-平面上の領域を E とする。$\phi(u, v)$、$\psi(u, v)$ は、E 上連続な偏導関数を持ち $f(x, y)$ は、E の像 $F(E)$ 上で連続ならば、以下の式が成り立つ。

$$\iint_{F(E)} f(x, y) dxdy = \iint_E f(\phi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv \tag{7}$$

$$\text{ここで、} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{8}$$

3変数の時には、以下のようになる。

定理 5.3 一対一対応の変数変換 $x = \lambda(u, v, w)$、$y = \mu(u, v, w)$、$z = \nu(u, v, w)$ において、uvw-空間の領域を E とする。$\lambda(u, v, w)$、$\mu(u, v, w)$、$\nu(u, v, w)$ は、E 上連続な偏導関数を持ち $f(x, y, z)$ は、E の像 $F(E)$ 上で連続ならば、以下の式が成り立つ。

$$\iiint_{F(E)} f(x, y, z) dxdydz = \iiint_E f(\lambda(u, v, w), \mu(u, v, w), \nu(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudv$$

$$\text{ここで、} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

ここに現れる、$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ や、$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ の絶対値を通常 ヤコビ行列式とか、ヤコビアン (Jacobian) という。

例 5.1 $D=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le 1,\ 0\le x-y\le 1\}$ において、$u=x+y$、$v=x-y$ とおくと、$E=\{(u,v)\mid 0\le u,v\le 1\}$ かつ、$x=(u+v)/2$、$y=(u-v)/2$ だから、

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\|\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right\| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y)e^{x-y}dxdy &= \iint_E ue^v\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv && (9)\\
&= \int_0^1\left(\int_0^1 ue^v(\frac{1}{2})dv\right)du && (10)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 udu\int_0^1 e^v dv && (11)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1\cdot e^v|_0^1 && (12)\\
&= \frac{1}{4}(e-1) && (13)
\end{aligned}$$

例 5.2 （極座標の変数変換）$x=x(r,\theta)=r\cos\theta$、$y=y(r,\theta)=r\sin\theta$。まず、ヤコビアンを計算する。

$$\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{array}\right| = r$$

例えば、これを利用して、$D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ 上での次の積分を考えると以下の様になる。

$$\begin{aligned}
&\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy\\
&= \int_1^2\int_0^{2\pi} e^{r^2}rd\theta dr = \int_1^2\left(\int_0^{2\pi} re^{r^2}d\theta\right)dr\\
&= \int_1^2 re^{r^2}\theta\Big|_0^{2\pi}dr = 2\pi\int_1^2 re^{r^2}dr\\
&= 2\pi\,\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_1^2 = \pi(e^4-e).
\end{aligned}$$

例 5.3 （球面座標）$x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi$ によって、表すと、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} &= \left|\begin{array}{ccc} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & -r\sin\theta & 0\end{array}\right|\\
&= \cos\theta(r^2\cos\theta\cos\phi\sin\theta\cos\phi + r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi)\\
&\quad + r\sin\theta(\sin\theta\cos\phi r\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi r\sin\theta\sin\phi)\\
&= r^2\sin\theta(\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi)\\
&= r^2\sin\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\\
&= r^2\sin\theta \ge 0
\end{aligned}$$

従って、この座標系を用いると、

$$\iiint_{F(E)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_E f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)r^2\sin\theta drd\theta d\phi.$$

例えば、$D = \{(x,y,z) \mid 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ とすると以下の積分の計算は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\iiint_D xyzdxdydz \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \Big(r\sin\theta\cos\phi \cdot r\sin\theta\sin\phi \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta \Big) d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \left(\int_1^2 r^5 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\phi d\phi \right) \\
&= \left[\frac{r^6}{6} \right]_1^4 \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta \right]_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{4}\cos 2\phi \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{455}{2}.
\end{aligned}$$

定理 5.4 領域 D 関数 $f(x,y)$ は、D のある、近似増加列 $\{D_n \mid n = 1, \ldots\}$ に対し、

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} |f(x,y)|dxdy$$

が存在するならば、$f(x,y)$ は、D 上広義積分可能で、

$$\iint_D |f(x,y)|dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} |f(x,y)|dxdy$$

である。このとき、

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy.$$

例 5.4

$$\begin{aligned}
\iint_{0\leq x\leq y\leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \lim_{n\to\infty} \int_{1/2^n}^1 \left(\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx \right) dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{1/2^n}^1 \log(x + \sqrt{x^2+y^2}) \Big|_0^y dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{1/2^n}^1 (\log(1+\sqrt{2})y - \log y)dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{1/2^n}^1 \log(1+\sqrt{2})dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \log(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

6　多変数関数の積分の応用

6.1　体積の計算

例 6.1 平面 $x+(y/3)+(z/2)=1$　と各座標平面とで囲まれた部分　V の体積。

一般に、平面の方程式 $ax+by+cz=d$ が与えられると、x-切片は、d/a、y-切片は、d/b、z-切片は、d/c。従って、この例の場合は、それぞれ、$1,3,2$。従って、

$$\iiint_V dxdydz = \int_0^1\int_0^{3-3x}(2-2x-\frac{2}{3}y)dydx = \frac{3\cdot 2}{2\cdot 3}.$$

例 6.2 円柱 $x^2+y^2\leq 4$ と、$0\leq z\leq x$ で囲まれた部分 V の体積。

$$\begin{aligned}\iiint_V dxdydz &= \int_{-2}^2\left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}}xdx\right)dy\\ &= \int_{-2}^2 \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\sqrt{4-y^2}}dy\\ &= \int_{-2}^2\frac{1}{2}(4-y^2)dy\\ &= 2y-\frac{1}{6}y^3\Big|_2^2\\ &= 4-\frac{8}{6}+4-\frac{8}{6}=\frac{16}{3}.\end{aligned}$$

極座標を使うことも出来る。$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$。

$$\begin{aligned}\iiint_V dxdydz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^2 r\cos\theta\cdot rdr\right)d\theta\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\frac{1}{3}r^3\Big|_0^2 d\theta\\ &= \frac{8}{3}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

例 6.3 $x^2+y^2+z^2\leq 9$、$z^2\geq x^2+y^2$、$x\geq 0$、$y\geq 0$、$z\geq 0$ で囲まれた部分 V の体積。$\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq\sqrt{9-x^2-y^2}$。

$$\begin{aligned}\iiint_V dxdydz &= \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\left(\int_0^{\sqrt{(9/2)-x^2}}\sqrt{9-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}dy\right)dx\\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 r^2\sin\theta drd\theta d\phi=\frac{9}{4}(2-\sqrt{2})\pi\end{aligned}$$

6.2　曲面積

命題 6.1 領域 D 上で定義された関数 $z=f(x,y)$ で与えられる曲面積は、次の式で与えられる。

$$\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

例 6.4 平面 $z = ax + by + c$ 上の $0 \le x \le \Delta x$、$0 \le y \le \Delta y$ の部分の面積。

$$\int_0^{\Delta x}\int_0^{\Delta y}\sqrt{1+a^2+b^2}dydx = \sqrt{1+a^2+b^2}\Delta x\Delta y.$$

前の例は、$(0,0,0)$、$(\Delta x, 0, z_x\Delta x)$、$(0, \Delta y, z_y\Delta y)$ で定義される平行四辺形の面積が、

$$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\Delta x\Delta y$$

であることを示している。これを初等的に証明し、それを用いて、命題 6.1 を証明してみよう。

命題 6.2 領域 D 上で定義され、極座標で表示された、関数 $z = f(r,\theta)$ で与えられる曲面積は、次の式で与えられる。

$$\iint_D\sqrt{1+\Big(\frac{\partial z}{\partial r}\Big)^2+\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)^2}rdrd\theta$$

例 6.5 曲面 $z = xy$ の、$x^2+y^2 \le 1$ の部分の図形の曲面積。

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1+y^2+x^2}dydx$$

これを、円柱座標で計算する。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$。すると、$z = (r^2/2)\sin 2\theta$。従って、

$$\frac{\partial z}{\partial r} = r\sin 2\theta,\ \frac{\partial z}{\partial\theta} = r^2\cos 2\theta$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1+r^2\sin^2 2\theta+r^2\cos^2 2\theta}rdrd\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1+r^2}rdrd\theta\\
&= \pi\ \frac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^1\\
&= \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

命題 6.3 領域 D 上で定義され、球面座標（$x = r\cos\theta\cos\phi$、$y = r\sin\theta\sin\phi$、$z = r\cos\theta$）で表示された、関数 $r = f(\theta,\phi)$ で与えられる曲面積は、次の式で与えられる。

$$\iint_D\sqrt{\Big(r^2+(\frac{\partial r}{\partial\theta})^2\Big)\sin^2\theta+\Big(\frac{\partial r}{\partial\phi}\Big)^2}rd\theta d\phi$$

例 6.6 球面 $x^2+y^2+z^2 = 2^2$ の $x^2+y^2 \le 2x$、$z \ge 0$ の部分の曲面積。
範囲は $(x-1)^2+y^2 \le 1$ を意味するから、球面座標を用いると

$$S = 4\int_0^{\pi/2}\int_{\theta-\pi/2}^{\pi/2-\theta}|\sin\theta|d\phi d\theta = 4(\pi-2).$$