CALCULUS II

鈴木 寛 (Hiroshi SUZUKI*)
国際基督教大学理学科数学教室

平成 16 年 2 月 12 日

1 多変数関数の微分

独立変数が、２個以上の関数の微分を考える。簡単のため、２変数の場合に話しを限ることも多いが、その殆どが、３変数以上の場合に拡張出来る。

1.1 極限と連続性

定義 1.1 $f(x,y)$ を 点 $A(a,b)$ に近い点では、いつも定義された関数とする。

1. 点 $P(x,y)$ が、点 $A(a,b)$ と一致することなく点 $A(a,b)$ に近づくとする。このとき、その近づき方によらず、関数 $f(x,y)$ が ある一つの値 c に近づく時、$f(x,y)$ には、点 $A(a,b)$ において、極限が存在して、その極限値は、c であるという。または、関数 $f(x,y)$ は、c に収束するとも言う。このとき、$f(x,y) \to c \ (x \to a,\ y \to b)$ または、次のように書く。
$$\lim_{x\to a,\ y\to b} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{P\to A} f(x,y) = c.$$
2. 関数 $f(x,y)$ が、次の条件を満たすとき、点 $A(a,b)$ で連続であると言う。
   (a) $f(a,b)$ が定義されている。
   (b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在する。
   (c) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$。

注

1. 極限の定義では、関数が、その点と一致する事は、除いている。特に、その点で、関数が、定義されているかどうかは、問わない。
2. 点の近づき方によって、近づく値が違うときは、極限は存在しない。

例 1.1 1. 関数 $f(x,y)$ を次のように定義する。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*E-mail:hsuzuki@icu.ac.jp

この関数は、x-軸上でも、y-軸上でも、値が、0 であるが、$y = mx$ の直線上で、x が、0 に近づくと、

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2} \neq f(0,0).$$

例えば、$m = 0$ すなわち x 軸上で、$(0,0)$ に近づくときの極限値は、0 で、それは、$m = 1$ すなわち $y = x$ の直線上で、$(0,0)$ に近づくときの極限値 $1/2$ と異なるから、個の関数は、点 $(0,0)$ で極限値を持たない。特に、連続でもない。

1.2 偏微分

多変数関数の微分を考える。まず、簡単に考えられるのは、一つの変数のみ、変数と見て、他のものは、定数と見て、一変数の関数として、微分することである。

定義 1.2 1. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h,q) - f(p,q)}{h}$, あるいは $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(p,q+h) - f(p,q)}{h}$ が存在するとき、関数 $f(x,y)$ は、点 (p,q) において、x に関して偏微分可能、あるいは、y に関して偏微分 (partial derivative) 可能と言い、それぞれ、以下のように書く。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p,q) = f_x(p,q) = D_x f(p,q),\ \frac{\partial f}{\partial y}(p,q) = f_y(p,q) = D_y f(p,q)$$

2. 関数 $f(x,y)$ が各点で偏微分可能であるとき、各点での偏微分を対応させる関数を偏導関数といい以下の様に書く。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f,\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f$$

偏導関数 f_x を求めるには、単に $f(x,y)$ の y を定数と思って x に関して、微分すればよい。y に関する偏導関数についても同じ。

例 1.2 1. $f(x,y) = x^2y + e^x$ とすると、$f_x = 2xy + e^x$、$f_y = x^2$。

1.3 全微分

関数の極限のところでも見たように、一変数関数から、多変数関数に変わっても考え方は、余り変わらない。しかし、点の近づき方に様々な方向が可能であることから、複雑な面が現れる。その意味でも、多変数関数の動向を調べるため、偏微分（一つを残して、すべての変数を定数と見て微分をすること）では、不十分であることは明らかである。

定義 1.3 1. 点 (p,q) の近傍で定義されている２変数関数 $f(x,y)$ に対して、定数 a, b が存在して $\epsilon(x,y) = f(x,y) - f(p.q) - a(x-p) - b(y-q)$ が

$$\lim_{(x,y)\to(p,q)} \frac{\epsilon(x,y)}{\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}} = 0$$

を満たすとき、$f(x,y)$ は、点 (p,q) で全微分可能と言う。(a,b) を点 (p,q) における微分係数という。

2. $z - f(p,q) = a(x-p) + b(y-q)$ のグラフを、点 $(p,q,f(p,q))$ における 接平面という。
3. 関数 $f(x,y)$ が各点で全微分可能であるとき、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

を $f(x,y)$ の全微分と言う。

命題 1.1 (1) $f(x,y)$ が、点 (p,q) で全微分可能ならば、偏微分可能で、微分係数は、

$$(a,b) = (\frac{\partial f}{\partial x}(p,q), \frac{\partial f}{\partial x}(p,q)).$$

(2) 逆に、点 (p,q) の近くで、$f(x,y)$ が偏微分可能でかつその偏導関数が、連続ならば、$f(x,y)$ は、点 (p,q) で全微分可能である。特に、$f(x,y)$ は、点 (p,q) で連続である。

証明 証明略。 ■

1.4 ベクトル表示

多変数関数の場合、ベクトル表示を用いることにより、変数の数に無関係な表示を得ることもできる。点、変数をベクトル表示し、

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とする。関数も $f(X)$ の様に表す。

関数 $f(X)$ が、点 P で連続であるとは、次が成立することである。

$$\lim_{X \to P} f(X) = f(P).$$

関数 $f(X)$ が、点 P で（全）微分可能であるとは、ある、ベクトル $A = (a_1, \ldots, a_n)$ が存在して、以下を満たすことである。

$$\lim_{X \to P} \frac{\epsilon(X)}{\|X - P\|} = 0, \ \text{ただし}\ \epsilon(X) = f(X) - f(P) - A \cdot (X - P).$$

接平面の方程式は、以下のようになる。

$$z - f(P) = (\mathrm{grad} f)(P) \cdot (X - P), \ \text{ただし}\ \mathrm{grad} f(P) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)).$$

このように、一変数の場合と、殆ど同じように記述することが出来る。その意味でも、全微分といわず、微分と呼んだ方が自然かも知れない。

2　合成関数の微分と高階導関数

2.1　合成関数の微分

命題 2.1 関数 $f(x,y)$ が全微分可能で、さらに、x、y が t の関数となっている場合を考える。$x=x(t)$、$y=y(t)$ それぞれが、t に関して、微分可能ならば、$f(x(t),y(t))$ は、t に関して、微分可能で、次の式が成り立つ。

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

証明　各点 $t=p$ に対して、

$$\begin{aligned} x(t) &= x(p)+x'(p)(t-p)+\epsilon(t) \\ y(t) &= y(p)+y'(p)(t-p)+\epsilon'(t) \end{aligned}$$

と置くと、$x(t)$、$y(t)$ はともに、t に関して、微分可能だから、$t\to p$ のとき、

$$\frac{\epsilon(t)}{(t-p)}\to 0,\ \frac{\epsilon'(t)}{(t-p)}\to 0$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} & f(x(t),y(t))-f(x(p),y(p)) \\ = & \frac{\partial f}{\partial x}(x(p),y(p))(x(t)-x(p))+\frac{\partial f}{\partial y}(x(p),y(p))(y(t)-y(p))+\epsilon(x(t),y(t)) \end{aligned}$$

とすると、$f(x,y)$ が全微分可能であることより、$(x(t),y(t))\to(x(p),y(p))$ のとき

$$\frac{\epsilon(x(t),y(t))}{\sqrt{(x(t)-x(p))^2+(y(t)-y(p))^2}}\to 0$$

従って、

$$\begin{aligned} & \frac{f(x(t),y(t))-f(x(p),y(p))}{t-p} \\ = & \frac{\partial f}{\partial x}(x(p),y(p))(x'(p)+\frac{\epsilon(t)}{t-p})+\frac{\partial f}{\partial y}(x(p),y(p))(y'(p)+\frac{\epsilon'(t)}{t-p})+\frac{\epsilon(x(t),y(t))}{t-p} \end{aligned}$$

ここで、最後の項は、

$$\begin{aligned} & \lim_{t\to p}\frac{\epsilon(x(t),y(t))}{|t-p|} \\ = & \lim_{t\to p}\frac{\epsilon(x(t),y(t))}{\sqrt{(x(t)-x(p))^2+(y(t)-y(p))^2}}\sqrt{(x'(p)+\frac{\epsilon(t)}{t-p})^2+(y'(p)+\frac{\epsilon'(t)}{t-p})^2} \\ = & 0 \end{aligned}$$

これより、

$$\frac{df}{dt}(x(p),y(p))=\frac{\partial f}{\partial x}(x(p),y(p))x'(p)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(p),y(p))y'(p)$$

を得る。 ■

定理 2.2 関数 $f(x,y)$ が全微分可能で、$x=x(u,v)$、$y=y(u,v)$ が u,v で偏微分可能ならば、

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

証明 v を固定すれば、x、y、f すべて、u の関数と見ることが出来るから、それぞれの、u に関する微分を、偏微分に置き換えれば、結果は、命題 2.1 から得られる。 ■

上の結果は、重要なので、一般の多変数関数の場合にも、結果だけ述べる。

定理 2.3 関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ が全微分可能で、$x_i=x(u_1,\ldots,u_m)$ $(i=1,\ldots,n)$ が 各 u_j $(j=1,\ldots,m)$ で偏微分可能ならば、

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}.$$

これらの結果を、ベクトルと行列で書くこともできる。

$$(\frac{\partial f}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial u_m})=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n})\left(\begin{array}{ccc}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m}\\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m}\end{array}\right)$$

この最後の行列をヤコビ行列と言い、$\dfrac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_m)}$ とも書く。また、

$$\mathrm{grad}(f)=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$$

を勾配 (gradient) と言う。

例 2.1 1. $f(x,y)=x^8+x^5y^9$、$x(t)=3t^2-4t$、$y(t)=5t-4$。$F(t)=f(x(t),y(t))$ の $t=1$ における微分係数を考える。$x(1)=-1$、$y(1)=1$ だから、

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= (8x^7+5x^4y^9)(6t-4)+9x^5y^8\cdot 5\\ &= (-8+5)\cdot 2-45=-51\end{aligned}$$

2. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$、$x(u,v)=2u+3v$、$y(u,v)=uv$。$(u,v)=(-1,1)$ での u,v に関する勾配を考える。

$$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\left(\begin{array}{cc}2 & 3\\ 1 & -1\end{array}\right)=(\frac{1}{\sqrt{2}},2\sqrt{2})$$

3. $z=f(x,y)$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ の時、

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=(\frac{\partial z}{\partial \rho})^2+\frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^2.$$

まず、それぞれの偏微分を求めると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \rho} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-\rho\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}\rho\cos\theta\end{aligned}$$

従って、次を得る。

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial z}{\partial \rho})^2 + \frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^2 \\
&= (\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial z}{\partial x}(-\rho\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\rho\cos\theta)^2 \\
&= (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2.
\end{aligned}
$$

2.2 高階導関数

$f(x,y)$ の偏導関数が、また偏微分可能なときは、その偏導関数が考えられる。これを続けていけば、高階偏導関数が得られる。これらを、次のように書く。

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{x,y},\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{x,x}.$$

高階導関数について次の定理は、基本的である。

定理 2.4 [Schwartz] 点 (p,q) の近傍で、f_x, f_y, f_{xy} が存在し、f_{xy} が連続ならば、f_{yx} も存在し、$f_{x,y}(p,q) = f_{y,x}(p,q)$。

例 2.2 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ とすると、

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

3 平均値の定理と、微分の応用

3.1 平均値の定理

命題 3.1 関数 $f(x,y)$ が偏微分可能ならば、

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + hf_x(a+h\theta, b+k\theta) + kf_y(a+h\theta, b+k\theta)$$

を満たす、$0 < \theta < 1$ がある。

証明 a,b,h,k を定数として、$F(t) = f(a+ht, b+kt)$ と置く。一変数の場合の平均値の定理より、

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)$$

となる、$0 < \theta < 1$ がある。また、$x = x(t) = a + ht$、$y = y(t) = b + kt$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
\frac{dF(t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= hf_x(a+ht, b+kt) + kf_y(a+ht, b+kt)
\end{aligned}
$$

従って、$f(x,y)$ が偏微分可能ならば、$F(1) - F(0)$ の式から、

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = hf_x(a+h\theta, b+k\theta) + kf_y(a+h\theta, b+k\theta).$$

■

上の平均値の定理の証明において、一変数のテーラーの定理を適用すると、２変数関数のテーラーの定理を得る。

命題 3.2 関数 $f(x,y)$ が n 階まで、連続な偏微導関数を持ち、$n+1$ 階の偏微導関数を持てば、

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\cdots \\ &\quad +\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(a,b)+R_n \end{aligned}$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(a+\theta h,b+\theta k)$$

を満たす、$0<\theta<1$ がある。

3.2 陰関数

$y=f(x)$ の様に、x の値に、y の値を対応させる具体的な表式が示されているとき、y は x の陽関数 (explicit function) といい、$F(x,y)=0$ の様に関係式としてだけである時は、y は、x の陰関数 (implicit function) であるという。多変数の場合にも、例えば、$F(x_1,\ldots,x_n,z)=0$ である時、z は、$x_1,\ldots,x_n$ の陰関数である。

$F(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ の時は、もし、$y=f(x_1,\ldots,x_n)$ と書けるならば、両辺を x_1 で偏微分する。すると、$x_2,\ldots,x_n$ は、独立変数すなわち、x_1 で微分すると、0 だから、

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x_1}=0$$

より、以下の式を得る。

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=-\frac{F_{x_1}(x_1,\ldots,x_n,y)}{F_y(x_1,\ldots,x_n,y)}$$

では、どのようなとき、$y=f(x_1,\ldots,x_n)$ の様に、陽関数に書け、また、上のような操作が可能なのか。

定理 3.3 [陰関数定理] 関数 $F(x,y)$ は、点 (p,q) の近傍で連続、かつ偏微分可能で、偏導関数 $F_x(x,y)$、$F_y(x,y)$ が連続とする。このとき、$F(p,q)=0$、$F_y(p,q)\neq 0$ ならば、点 $x=p$ の近傍で微分可能な関数 $y=f(x)$ がただ一つ定まり

(1) $F(x,f(x))=0$、$f(p)=q$。

(2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))f'(x)=0$

定理 3.4 [陰関数定理] 関数 $F(x,y,z)$ は、点 (p,q,r) の近傍で連続、かつ偏微分可能で、偏導関数 $F_x(x,y,z)$、$F_y(x,y,z)$、$F_z(x,y,z)$ が連続とする。このとき、$F(p,q,r)=0$、$F_z(p,q,r)\neq 0$ ならば、点 $(p.q)$ の近傍で微分可能な関数 $z=f(x,y)$ がただ一つ定まり

(1) $F(x, y, f(x, y)) = 0$、$f(p, q) = r$。

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$

n 変数のときは、どうであろうか。

3.3 極値

2 変数関数 $z = f(x, y)$ と、点 $P(p, q)$ において、点 P に十分近い任意の点 $Q(x, y)$ に対して、

$$f(p, q) < f(x, y)$$

が成り立つとき、関数 $z = f(x, y)$ は、点 P で極小 (minimum) であると言い、点 P を極小点、$f(p, q)$ の値を極小値という。逆に、

$$f(p, q) > f(x, y)$$

が成り立つとき、関数 $z = f(x, y)$ は、点 P で極大 (maximum) であると言い、点 P を極大点、$f(p, q)$ の値を極大値という。極小点、極大点を総称して、極点 (extremum point) と言い、極小値と、極大値を総称して、極値という。

x 座標、y 座標を固定して考えれば、一変数の場合の結果から、点 $P(p, q)$ が $z = f(x, y)$ の極点であれば、

$$f_x(p, q) = f_y(p, q) = 0$$

を満たすことが分かる。このように、$f_x(p, q) = f_y(p, q) = 0$ を満たす点を $f(x, y)$ の停留点 (stationary point) と言う。このことから、極値を調べるには、まず、停留点を調べれば良いことが分かる。

定理 3.5 関数 $f(x, y)$ が偏微分可能で、点 (p, q) は、停留点とする。

$$A = f_{xx}(p, q),\ B = f_{xy}(p, q),\ C = f_{yy}(p, q)$$

とおくとき、

(1) $B^2 - AC < 0$ ならば、点 (p, q) は、極点であり、さらに、

  (a) $A > 0$ のときは、$f(p, q)$ は、極小値

  (b) $A < 0$ のときは、$f(p, q)$ は、極大値

  である。

(2) $B^2 - AC > 0$ ならば、点 (p, q) は、極点ではない。

証明　命題 3.2 を $n=1$ として、適用すると、

$$\begin{aligned}
&f(p+h,q+k)-f(p,q)\\
&\quad= \quad hf_x(p,q)+kf_y(p,q)+\\
&\qquad\quad \frac{1}{2}\Big(h^2f_{xx}(p+\theta h,q+\theta k)+2hkf_{xy}(p+\theta h,q+\theta k)+k^2f_{yy}(p+\theta h,q+\theta k)\Big)
\end{aligned}$$

ここで、$f_x(p,q)=f_y(p,q)=0$ だから、

$$= \quad \frac{1}{2}k^2\left(\frac{h^2}{k^2}f_{xx}(p+\theta h,q+\theta k)+2\frac{h}{k}f_{xy}(p+\theta h,q+\theta k)+f_{yy}(p+\theta h,q+\theta k)\right)$$

最後の式は、h/k の 2 次式と見ると、h,k が小さいとき、判別式は、B^2-AC である。

ここで、$B^2-AC<0$ ならば、最後の式は、0 にならない。かつ、その符号は、A の符号で決まる。従って、

(a) $A>0$ のときは、$f(p+h,q+k)-f(p,q)>0$ すなわち、$f(p,q)$ は、極小値。

(b) $A<0$ のときは、$f(p+h,q+k)-f(p,q)<0$ すなわち、$f(p,q)$ は、極大値。

$B^2-AC>0$ ならば、h/k は、任意の値をとりうるから、$f(p+h,q+k)-f(p,q)$ の符号は、定まらない。従って、点 (p,q) は、極点ではない。 ■

注　$B^2-AC=0$ のときは、極値であるかどうか判定できない。

例 3.1 $f(x,y)=4xy-2y^2-x^4$ とする。すると、

$$f_x=4y-4x^3,\ f_y=4x-4y,\ f_{xx}=-12x^2,\ f_{xy}=4,\ f_{yy}=-4$$

これより、$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たすものは、$y=x$ を代入して、$x=-1,0,1$。$D=16-48x^2=16(1-3x^2)$。従って、$(1,1),(-1,-1)$ で極大、$(0,0)$ では、極値を持たない。

3.4　平均値の定理の証明

以下の定理の証明をする。

命題 3.6 (命題 3.2 $n=1$ 再掲) $f(x,y)$ を一次導関数 $f_x,\ f_y$ 二次導関数が存在し連続な *(C^2 級)* 関数とする。このとき、$a,\ b$ と $h,\ k$ に対して、次の条件を満たす θ $0<\theta<1$ が存在する。

$$\begin{aligned}
&f(a+h,b+k)\\
&\quad= \quad f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)\\
&\qquad\quad \frac{1}{2}(h^2f_{x,x}(a+\theta h,b+\theta h)+2hkf_{x,y}(a+\theta h,b+\theta k)+k^2f_{y,y}(a+\theta h,b+\theta k))
\end{aligned}$$

証明に入る前に、一変数関数の定理を確認し、その証明を与える。

補題 3.7 $f(x)$, $g(x)$ をともに区間 $[a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能な関数で、$g'(x) \neq 0$ とする。このとき、$a < u < b$ で次の条件を満たすものが存在する。

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}. \tag{1}$$

証明 $F(x)$ を次のように定義すると、

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

$F(a) = F(b) = 0$ だから Roll の定理により、$F'(u) = 0$ となるものがある。これは、(1) が成り立つことを意味する。 ■

補題 3.8 $F(x)$ を 0 を含む区間で連続で二階微分可能な関数とする。この区間内の t に対して、$1 < \theta < 1$ で次の条件を満たすものが存在する。

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(\theta t)t^2. \tag{2}$$

証明 $f(x) = F(x) - F(0) - F'(0)x$, $g(x) = x^2$ とすると、$f(0) = g(0) = 0$ だから、補題 3.7 より 0 と t の間の u で下の最初の等号を満たすものが存在する。さらに、$f_1(x) = F'(x) - F'(0)$, $g_1(x) = 2x$ に補題 3.7 を適用するかまたは、通常の微分係数の定義または、平均値の定理より、二番目の等号をみたす v が 0 と u の間に存在する。v は 0 と t の間でもあるから、それは、$v = \theta t$ $0 < \theta < 1$ とも書け、最後の等号が得られる。

$$\frac{F(t) - F(0) - F'(0)t}{t^2} = \frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{F'(u) - F'(0)}{2u} = \frac{F''(v)}{2} = \frac{F''(\theta t}{2}.$$

最初の式と、最後の式から、結果がえられる。(θ を使う理由は $t > 0$ の場合も $t < 0$ の場合も一通りの表し方で表現できる便利さのゆえです。) ■

命題の証明： $F(t) = f(a + ht, b + kt)$ とおくと、Chain Rule を用いて、

$$F'(t) = f_x(a + ht, b + kt)h + f_y(a + ht, b + kt)k.$$

さらにこれを微分すると、$f_x(a + ht, b + kt)$, $f_y(a + ht, b + kt)$ に Chain Rule を適用することになり、

$$\begin{aligned} F''(t) &= f_{x,x}(a + ht, b + kt)h^2 + f_{x,y}(a + ht, b + kt)hk \\ & \quad f_{y,x}(a + ht, b + kt) + f_{y,y}(a + ht, b + kt)k^2 \end{aligned}$$

二次導関数が連続であることから、Schwartz の定理により、$f_{x,y} = f_{y,x}$ 戸なることに注意する。さて、補題 3.8 で $t = 1$ とすると、$0 < \theta < 1$ で次の等式を満たすものが存在する。

$$\begin{aligned} & f(a + h, b + k) \\ &= F(1) \\ &= F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(\theta t)t^2 \\ &= f(h, k) + hf_x(a + h, b + k) + kf_y(a + h, b + k) \\ & \quad + \frac{1}{2}(h^2 f_{x,x}(a + \theta h, b + \theta h) + 2hkf_{x,y}(a + \theta h, b + \theta k) + k^2 f_{y,y}(a + \theta h, b + \theta k)). \end{aligned}$$

これが求める結果であった。 ■