Midterm Exam: Solutions

May 24, 2005

1. P, Q, R を命題とする。二つの論理式 $P \Rightarrow (\neg(Q \wedge R))$, $R \Rightarrow (Q \Rightarrow (\neg P))$ が等値であるかどうか判定し、等値または等値でないことを証明せよ。

   解. 等値である。なぜなら、

$$\begin{aligned} P \Rightarrow (\neg(Q \wedge R)) &\equiv (\neg P) \vee (\neg(Q \wedge R)) \\ &\equiv (\neg P) \vee ((\neg Q) \vee (\neg R)) \\ &\equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee (\neg R). \end{aligned}$$

   一方で、

$$\begin{aligned} R \Rightarrow (Q \Rightarrow (\neg P)) &\equiv (\neg R) \vee (Q \Rightarrow (\neg P)) \\ &\equiv (\neg R) \vee ((\neg Q) \vee (\neg P)) \\ &\equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee (\neg R). \end{aligned}$$

   よって、$P \Rightarrow (\neg(Q \wedge R)) \equiv R \Rightarrow (Q \Rightarrow (\neg P))$ が成り立つ。 Q.E.D.
   他にも、真理表を作って示してもよい。

2. 集合 A, B, C について、

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

   は常に成り立つか。成り立つならばそれを証明し、常には成り立たないならば反例をあげよ。

   解. 常に成り立つ。

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in (B \cup C)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((y \in B) \vee (y \in C)) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (y \in C)) \\ &\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times B) \vee ((x, y) \in A \times C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

   よって、$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. Q.E.D.

3. 四つの元から成る集合 A を $A = \{a, b, c, d\}$ とおく。R_1, R_2 をそれぞれ集合 A 上の関係とする（つまり直積集合 $A \times A$ の部分集合）。次の問いに答えよ。

   (a) $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$ のとき、R_1 は同値関係になるか。同値関係になるならばそれを証明し、ならないならばその理由を述べよ。

   (b) R_2 を同値関係とする。$\{(a, d), (a, b), (b, c)\} \subset R_2$ ならば $(c, d) \in R_2$ であることを証明せよ。

解. (a) 同値関係ではない。なぜなら、$(a,b) \in R_1$ かつ $(b,c) \in R_1$ であるが、$(a,c) \notin R_1$ となり推移律が不成立。(ちなみに反射律、対称律はどうですか。)
(b) R_2 は同値関係であるから反射律、対称律、推移律が成り立つ。$(a,b) \in R_2$, $(b,c) \in R_2$ であるから、対称律より $(b,a) \in R_2$, $(c,b) \in R_2$. よって、$(c,b) \in R_2$, $(b,a) \in R_2$ であるから、推移律より $(c,a) \in R_2$. さらに、$(c,a) \in R_2$, $(a,d) \in R_2$ であるから、推移律より $(c,d) \in R_2$. Q.E.D

4. すべての整数 $n \geq 4$ について
$$n! > 2^n$$
であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $2^4 = 16$. よって、$4! > 2^4$ であるから $n = 4$ のとき成立。次に、$n \geq 4$ なる整数 n にたいして $n! > 2^n$ が成り立つと仮定して、$(n+1)! > 2^{n+1}$ を示す。$n! > 2^n$ より、$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n$. さらに、$n \geq 4$ であるから $(n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. よって、$(n+1)! > 2^{n+1}$. ゆえに $n+1$ のときも成立。従って、数学的帰納法よりすべての整数 $n \geq 4$ にたいして、$n! > 2^n$. Q.E.D.

5. f を集合 X から集合 Y への写像とする。集合 A を $A \subseteq X$ とする。次の問いに答えよ：
   (a) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ を証明せよ。
   (b) $f^{-1}(f(A)) \neq A$ となるような集合 $X, Y, A \subseteq X$ および X から Y への写像 f の例をあげよ。
   (c) f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$ となることを証明せよ。

解. (a) $a \in A$ とする。$f(a) \in f(A)$ であるから ($a \in A$ を f で移すと $f(A)$ の元になるから)、$a \in f^{-1}(f(A))$. ゆえに、$A \subset f^{-1}(f(A))$. Q.E.D.
(b) **Example1.** $X = \{1,2\}$, $Y = \{3\}$, $A = \{1\}$ とおき、写像 f を $f(1) = f(2) = 3$ と定義する。すると $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{3\}) = \{1,2\}$ であるから $f^{-1}(f(A)) \neq A$.
Example 2. $X = Y = \boldsymbol{R}$, $A = [0.1] = \{x \mid (x \in \boldsymbol{R}) \land (0 \leq x \leq 1)\}$ とおき、写像 f を $f(x) = x^2$ と定義する。$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$ であるから $f^{-1}(f(A)) \neq A$.
これらの例から f が単射でないとき $f^{-1}(f(A)) \neq A$ となると予測できる。
(c) f を単射とする。(a) より $f^{-1}(f(A)) \supset A$ であるから、$f^{-1}(f(A)) \subset A$ を示せば $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ。$x \in f^{-1}(f(A))$ とすると定義より $f(x) \in f(A)$. よって $f(x) = f(y)$ なる $y \in A$ が存在する。f は単射であるから $x = y$. $x \notin A$ とすると $x \neq y$ となり矛盾。ゆえに $x \in A$. Q.E.D.

6. A, B を集合とする。
   (a) A と B が対等であることの定義を述べよ。
   (b) 対等な集合 A, B で $A \subset B$ (したがって $A \neq B$) を満たすような A, B の例を挙げ、両者が対等であることを証明せよ。

解. (a) A と B が対等であるとは A から B への全単射が存在することである。
(b) A と B が対等で、$A \subset B$ かつ $A \neq B$ という条件から有限集合は例にならないこ

とがわかります。実は「自分自身と対等な真部分集合を含むような集合」を無限集合の定義とすることもあります。
解答例：$A=$(偶数全体の集合), $B=\boldsymbol{Z}$ とすれば、$A\subset B$ であり、B の元 n を A の元 $2n$ に対応させることにより B から A への全単射が得られる。
他には、$A=\boldsymbol{N}$, $B=\boldsymbol{Z}$ や、$A=[a,b]$, $B=[a',b']$ $(a,b,a',b'\in\boldsymbol{R}, a'<a<b<b')$ などなどいろいろある（これらが対等になることを各自チェックすること）。講義、演習、Quiz などで出てきた例も復習してみて下さい。