BCM I : Final 2014

June 25, 2014

ID#: Name:

1. Let P, Q, R be statements.

   (a) Complete the following truth table. (5 pts)

P	Q	R	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	$(Q \wedge \sim R) \Rightarrow (\sim P)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

   (b) Let $X = (P \wedge Q) \Rightarrow R$ and $Y = (Q \wedge \sim R) \Rightarrow (\sim P)$. Determine true of false of each of the following. (2 pts)

   (i) $X \equiv Y$ (True, False) (ii) $X \vee \sim Y$ is tautology (True, False)

   (c) Express $(Q \wedge \sim R) \Rightarrow (\sim P)$ with $\vee$ and $\sim$ only without using $\wedge$ nor $\Rightarrow$. (3 pts)

2. Let n be a (fixed) positive integer. For $a, b \in \boldsymbol{Z}$, we write $a \equiv b \pmod{n}$, whenever there is an integer c such that $b - a = cn$. Show the following.

   (a) Let $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$. If $a \equiv b \pmod{n}$ and $c \equiv d \pmod{n}$, then $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ and $ac \equiv bd \pmod{n}$. (10 pts)

1.*	2.	3*.	4.	5.	6.	Total

ID#: Name:

(b) If $n \in \boldsymbol{Z}$ satisfies $\gcd(n, 6) = 1$, then $n^2 \equiv 1 \pmod{24}$. (5 pts)

(c) $5a + 19b \equiv 0 \pmod{24}$ if and only if $a \equiv b \pmod{24}$. (5 pts)

3. Show that there is an integer m such that for each integer $n \geq m$, there are nonnegative integers a and b such that $n = 5a + 7b$. (10 pts)

ID#: Name:

4. Let $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ and $h = g \circ f : X \to Z$ ($x \mapsto g(f(x))$) be functions. Prove or disprove the following.

   (a) If both f and g are one-to-one, then h is one-to-one. (5 pts)

   (b) If h is onto, then g is onto. (5 pts)

   (c) If both f and h are one-to-one, then g is one-to-one. (5 pts)

   (d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ for all subsets A, B in Y. (5 pts)

ID#: Name:

5. For $a, b \in \boldsymbol{R}$ with $a < b$, let $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$, and $[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x \leq b\}$.

   (a) State the definition of $|A| \leq |B|$ for sets A, B, and give infinite sets A and B such that $|A| \leq |B|$ is not satisfied.[1] (5 pts)

   (b) State the definitions of $|A| = |B|$ and $|A| < |B|$ for sets A, B. (5 pts)

   (c) Show that $|(0, 1)| \leq |[a, b]|$ for all pairs $a, b \in \boldsymbol{R}$ with $a < b$. (5 pts)

   (d) Show $|(0, 1)| = |[a, b]|$ for all pairs $a, b \in \boldsymbol{R}$ with $a < b$. (5 pts)

[1] No need to show that they do not satisfy the condition.

ID#: Name:

6. Let $A = \{(a, b) \mid a \in \boldsymbol{N}, b \in \boldsymbol{N}\} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$. Let $(a, b) \sim (c, d)$ if and only if $ad - bc = 0$.

   (a) Show that the relation $\sim$ defines an equivalence relation on A. (10 pts)

   (b) Show that there is a bijection between the set of equivalence classes of A and $\boldsymbol{Q}^+$, where $\boldsymbol{Q}^+$ is the set of positive rational numbers. (5 pts)

   (c) Show that A is denumerable. (5 pts)

Please write your comments:

(1) About this course, especially suggestions for improvements.

(2) Topics in Mathematics or in other subjects you want to pursuit.

BCM I: Solutions to Final 2014

June 25, 2014

1. Let P, Q, R be statements.

   (a) Complete the following truth table. (5 pts)

P	Q	R	$(P \quad \wedge \quad Q)$	$\Rightarrow \quad R$	$(Q \quad \wedge \quad \sim R)$	$\Rightarrow \quad (\sim P)$
T	T	T	T	$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{T}$
T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	T	$\boldsymbol{F}$
T	F	T		$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{T}$
T	F	F		$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{T}$
F	T	T		$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{T}$
F	T	F		$\boldsymbol{T}$	T	$\boldsymbol{T}$
F	F	T		$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{T}$
F	F	F		$\boldsymbol{T}$		$\boldsymbol{T}$

   (b) Let $X = (P \wedge Q) \Rightarrow R$ and $Y = (Q \wedge \sim R) \Rightarrow (\sim P)$. Determine true of false of each of the following. (2 pts)

   (i) $X \equiv Y$ ($\boxed{\text{True}}$, False) (ii) $X \vee \sim Y$ is tautology ($\boxed{\text{True}}$, False)

   (c) Express $(Q \wedge \sim R) \Rightarrow (\sim P)$ with $\vee$ and $\sim$ only without using $\wedge$ nor $\Rightarrow$. (3 pts)
   Soln.

$$(Q \wedge \sim R) \Rightarrow (\sim P) \equiv \sim (Q \wedge \sim R) \vee (\sim P) \equiv (\sim Q) \vee R \vee (\sim P) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q) \vee R.$$

   Other Reasoning: Since the truth value is F only when $(\sim P, \sim Q, R) = (F, F, F)$, we have the expression.

2. Let n be a (fixed) positive integer. For $a, b \in \boldsymbol{Z}$, we write $a \equiv b \pmod n$, whenever there is an integer c such that $b - a = cn$. Show the following.

   (a) Let $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$. If $a \equiv b \pmod n$ and $c \equiv d \pmod n$, then $a + c \equiv b + d \pmod n$ and $ac \equiv bd \pmod n$. (10 pts)
   Soln. Since $a \equiv b \pmod n$ and $c \equiv d \pmod n$, there exist $s, t \in \boldsymbol{Z}$ such that $b - a = sn$, $d - c = tn$. Therefore,

$$(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c) = sn + tn = (s + t)n, \text{ and}$$

$$bd - ac = b(d - c) + (b - a)c = tnb + snc = (tb + sc)n.$$

   Hence $a + c \equiv b + d \pmod n$ and $ac \equiv bd \pmod n$.

   (b) If $n \in \boldsymbol{Z}$ satisfies $\gcd(n, 6) = 1$, then $n^2 \equiv 1 \pmod{24}$. (5 pts)
   Soln. Since $\gcd(n, 6) = 1$,

$$n \equiv 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \equiv 1, 5, 7, 11, -11, -7, -5, -1 \pmod{24}.$$

   By (a),

$$n^2 \equiv 1^2, 5^2, 7^2, 11^2, (-11)^2, (-7)^2, (-5)^2, (-1)^2 \equiv 1 \pmod{24}.$$

(c) $5a + 19b \equiv 0 \pmod{24}$ if and only if $a \equiv b \pmod{24}$. (5 pts)

Soln. Suppose $5a + 19b \equiv 0 \pmod{24}$. Then $5a \equiv 5a + 19b + 5b \equiv 5b \pmod{24}$ as $19b + 5b \equiv 24b \equiv 0 \pmod{24}$. Now $a \equiv 5 \cdot 5a \equiv 5 \cdot 5b \equiv b \pmod{24}$. Conversely if $a \equiv b \pmod{24}$, then $5a + 19b \equiv 5a + 19a \equiv 24a \equiv 0 \pmod{24}$.

3. Show that there is an integer m such that for each integer $n \geq m$, there are nonnegative integers a and b such that $n = 5a + 7b$. (10 pts)

Soln. We show that $m = 24$ satisfies the condition. $24 = 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2$, $25 = 5 \cdot 5 + 7 \cdot 0$, $26 = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3$, $27 = 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1$, $28 = 5 \cdot 0 + 7 \cdot 4$. So asume $n \geq 29$. Then $n - 5 \geq 24$ and by induction hypothesis, there are nonnegative integers a and b such that $n - 5 = 5a + 7b$. Hence $n = 5(a + 1) + 7b$ and n is a nonnegative linear combination of 5 and 7. Thus by induction, for each integer $n \geq 24$, there are nonnegative integers a and b such that $n = 5a + 7b$.

4. Let $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ and $h = g \circ f : X \to Z$ ($x \mapsto g(f(x))$) be functions. Prove or disprove the following.

(a) If both f and g are one-to-one, then h is one-to-one. (5 pts)

Soln. **True.** Suppose $h(a) = h(b)$ for $a, b \in X$. Then $g(f(a)) = (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) = g(f(b))$. Since g is one-to-one, $f(a) = f(b)$. Since f is one-to-one, $a = b$. Therefore, h is one-to-one.

(b) If h is onto, then g is onto. (5 pts)

Soln. **True.** Let $b \in Z$. Since h is onto, there is $a \in X$ such that $b = h(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$. Let $c = f(a) \in Y$. Then there is $c \in Y$ such that $g(c) = g(f(a)) = b$. Therefore g is onto.

(c) If both f and h are one-to-one, then g is one-to-one. (5 pts)

Soln. **False.** $X = Z = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$ and $f(1) = 1$, $g(1) = g(2) = 1$. Then $h(1) = 1$. Hence both f and h are one-to-one, but g is not one-to-one.

(d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ for all subsets A, B in Y. (5 pts)

Soln. **True.** Let $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Then $f(x) \in A \cap B$. Hence $x \in f^{-1}(A)$ and $x \in f^{-1}(B)$, and $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Thus $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Conversely let $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Then $f(x) \in A$ and $f(x) \in B$. Hence $f(x) \in A \cap B$, and $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Thus $f^{-1}(A \cap B) \supseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Therefore, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

5. For $a, b \in \boldsymbol{R}$ with $a < b$, let $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$, and $[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x \leq b\}$.

(a) State the definition of $|A| \leq |B|$ for sets A, B, and give infinite sets A and B such that $|A| \leq |B|$ is <u>not</u> satisfied.[2] (5 pts)

Soln. $|A| \leq |B|$ whenever there is a one-to-one function $f : A \to B$. $|\boldsymbol{R}| \not\leq |\boldsymbol{N}|$, and $|P(\boldsymbol{N})| \not\leq |\boldsymbol{N}|$.

(b) State the definitions of $|A| = |B|$ and $|A| < |B|$ for sets A, B. (5 pts)

Soln. $|A| = |B|$ whenever there is a bijection $f : A \to B$. $|A| < |B|$ whenever $|A| \leq |B|$ and $|A| \neq |B|$.

(c) Show that $|(0, 1)| \leq |[a, b]|$ for all pairs $a, b \in \boldsymbol{R}$ with $a < b$. (5 pts)

Soln. Let $f : (0, 1) \to [a, b]$ ($x \mapsto (b - a)x + a$). Then $f'(x) = b - a > 0$ and $f(x)$ is strictly increasing. Hence f is one-to-one. Note $f((0, 1)) = (a, b) \leq [a, b]$. Thus $|(0, 1)| \leq |[a, b]|$.

[2] No need to show that they do not satisfy the condition.

(d) Show $|(0,1)| = |[a,b]|$ for all pairs $a, b \in \boldsymbol{R}$ with $a < b$. (5 pts)

Soln. Let $g : [a,b] \to (0,1)$ $\left(x \mapsto \frac{1}{4(b-a)}(2x + b - 3a)\right)$. Since $g'(x) = \frac{1}{2(b-a)} > 0$, g is strictly increasing and one-to-one. Since $g([a,b]) = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $|[a,b]| \leq |(0,1)|$. Therefore by (c) and the theorem of Schröder-Bernstein, $|(0,1)| = |[a,b]|$.

6. Let $A = \{(a,b) \mid a \in \boldsymbol{N}, b \in \boldsymbol{N}\} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$. Let $(a,b) \sim (c,d)$ if and only if $ad - bc = 0$.

(a) Show that the relation $\sim$ defines an equivalence relation on A. (10 pts)

Soln. $(a,b) \sim (a,b)$ as $ab - ba = 0$. Hence the relation is reflexive Suppose $(a,b) \sim (c,d)$. then $ad - bc = 0$. Hence $cb - da = 0$. Thus $(c,d) \sim (a,b)$ and the relation is symmetric. Finally suppose $(a,b) \sim (c,d)$ and $(c,d) \sim (e,f)$. Then $ad - bc = cf - de = 0$. Since $d \neq 0$,

$$af - be = \frac{afd}{d} - \frac{bcf}{d} + \frac{bcf}{d} - \frac{bde}{d} = \frac{f}{d}(ad - bc) + \frac{b}{d}(cf - de) = 0.$$

Therefore $(a,b) \sim (e,f)$, and the relation is transitive.

(b) Show that there is a bijection between the set of equivalence classes of A and $\boldsymbol{Q}^+$, where $\boldsymbol{Q}^+$ is the set of positive rational numbers. (5 pts)

Soln. Let $A/{\sim}$ denote the set of all equivalence classes. Then $A/{\sim} = \{[(a,b)] \mid a \in \boldsymbol{N}, b \in \boldsymbol{N}\}$, where $[(a,b)]$ denotes the equivalence class containing (a,b). Let

$$f : A/{\sim} \to \boldsymbol{Q}^+ \quad \left([(a,b)] \mapsto \frac{a}{b}\right)$$

$(a,b) \sim (c,d)$ if and only if $ad - bc = 0$ if and only if $a/b = c/d$. Since every element of $\boldsymbol{Q}^+$ can be written in the form a/b with $a \in \boldsymbol{N}$ and $b \in \boldsymbol{N}$, $f((a,b)) = a/b$, and f is onto.

(c) Show that A is denumerable. (5 pts)

Soln. Let

$$h : A = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N} \ ((m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)).$$

Then h is a bijection and $|A| = |\boldsymbol{N}|$. Hence A is denumerable. Note that every number $M \in \boldsymbol{N}$ can be written as $M = 2^{m-1}(2n-1)$ for some $m, n \in \boldsymbol{N}$. Hence $h(m,n) = M$ and h is onto. Since the expression, $M = 2^{m-1}(2n-1)$ is unique, h is one-to-one.

数学通論 I を受講したみなさんへ

Grading Policy

最初に配布したシラバスにあるように、演習 (Recitation) (30%)（全員に 15 問割り当てました, 4/23 にはボランティアで多くの人が 1 問余分に解いてくれました）、宿題 (Homework) (20%)（8 回、80 問提出を求めました）、期末試験 (Final) (50%)（6 月 25 日に実施）。

教員によって考え方は異なりますが、私は、授業科目というより、コースという考え方が、学士課程教育では大切だと思っています。このコースで 10 週間かけてどれだけ学んだかが重要です。学んだ内容も、学び全体の中でそれをどのように位置づけるかも、ひとそれぞれでしょう。そこで、今までの課題を丁寧に提出し、演習の問題の大部分を黒板で発表してきた人は単位を落とすことはありません。ただし、期末試験の割合を高くしてあります。数学において、学んだ数学を試験で表現できることは大切だと考えているからです。

Final および提出物は週明けには返却できると思います。返却できるようになった時点で Moodle 出知らせ、授業支援室 H113（H113 閉室のときは H109）で受け取るようにします。

専門の数学の最初のコースはどうでしたか。楽しめましたか。お疲れ様。

After BCM I

まずは、夏の数学セミナーへ参加して下さると嬉しいですね。(7/12-7/17 の内の 4 日間で近日中に日程確定。場所は ICU 軽井沢キャンパスです。）今年の教科書は榎本彦衛著「グラフ学入門」です。私のホームページに過去の記録が載っています。

http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/class/summer_seminar/index.html

また、教科書の第 13 章 Proofs in Calculus を読むことを勧めます。微分積分学を復習することにもなりますし、数学通論 II への橋渡しにもなります。数学通論に関連して、ちょっと堅めに夏休みのお薦めを書きます。

1. 数学通論 III の参考書「集合と位相」内田伏一著、裳華房 の前半が集合論です。
2. 数学通論 II に関係する、高木貞治「解析概論」を最初からじっくり読む。
3. 線形代数学 III に関係する、佐武一郎著「線型代数入門」を最初からじっくり読む。
4. 簡単に取り組めそうなのは、「集合への 30 講」志賀浩二著　朝倉書店。
5. 公理的集合論入門をかじってみたい人には、「新装版：集合とはなにか (はじめて学ぶ人のために)」竹内外史著、講談社。

私は、一年生の夏休みは岩村聯著「束論」を読み通しました。これが数学の本で初めて読み通したものでした。

二年生の夏は記憶が定かではありませんが松坂和夫著「集合と位相」を読んだと思います。全部は読まなかったかも知れません。個人的には、上の 1 にかわるものとしてお薦めです。

三年生の夏には「集合論入門」赤摂也著、培風館（ISBN4-563-00301-8, 1957.1.25）を短期間に読み通しました。集合と位相関係の本が並びましたが、無論、他にも読みました。Serge Lang の Algebra は一年生の秋から、3 人で自主ゼミをして読み、4 年まで続けました。完全には終わりませんでした。ポントリャーギンの「連続群論」上下も 3 人での自主ゼミをながいことしましたが、上巻しかゼミでは終わりませんでした。ポントリャーギンの「常微分方程式」はかなり進みましたが、読み終わったかどうかはあまりよく覚えていません。コルモゴロフ・フォミーンの「関数解析の基礎」は読み始めましたが、問題が難しく、あまり進みませんでした。

夏休みにじっくり一冊、数学の本を読むことに時間をかけることができれば、たとえ、読む量は少なくても、大きな価値があると思いますよ。数学で学んだことは何年かたって、誤りだったということも、時代遅れになることもありません。また、苦労して読む経験はすべて思考のトレーニングになっているハズです。数学を楽しみましょう。

鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*, URL: http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/science/)