BCM I : Final 2008

June 23, 2008

Division: **ID#:** **Name:**

1. P, Q, R を命題とする。このとき、真理表を完成することにより次が成立するかどうか判定せよ。 (10 pts)

$$P \Rightarrow \sim (Q \vee R) \equiv \sim ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

P	Q	R	$P \quad \Rightarrow \quad \sim \quad (Q \quad \vee \quad R)$	$\sim \quad ((P \quad \wedge \quad Q) \quad \vee \quad (P \quad \wedge \quad R))$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

等値（論理同値）かどうかの判定：

2. P と Q を命題とするとき $P \downarrow Q$ を下の真理表で表される真理値をもつ命題とする。

P	Q	$P \downarrow Q$	$\sim P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T

(a) $P \downarrow Q$ と等値（論理同値）な命題を $\sim$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。 (2 pts)

(b) $\sim P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$ および $P \Rightarrow Q$ と等値（論理同値）な命題を $\downarrow$ （と括弧）だけを用いて表せ。$P, Q, \downarrow$ などは何度用いても良い。[Hint: まず $P \downarrow P$ の真理値を計算] (8 pts)

$\sim P \equiv$

$P \wedge Q \equiv$

$P \vee Q \equiv$

$P \Rightarrow Q \equiv$

Division: **ID#:** **Name:**

3. $\boldsymbol{Z}$ を整数の集合とし、n を自然数とする。$a, b \in \boldsymbol{Z}$ のとき、$a \equiv b \pmod{n}$ は $(\exists q \in \boldsymbol{Z})[b - a = nq]$ すなわち、$b - a$ が整数の範囲で n で割り切れることを表すものとする。以下において $a \equiv b \pmod{n}$ は同値関係であること、および $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$ ならば $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ であることは用いて良い。

   (a) $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$ について、$a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$ ならば $ac \equiv bd \pmod{n}$ であることを示せ。 (5 pts)

   (b) $a, b \in \boldsymbol{Z}$ についての関係を $3a^2 + 27b^2 \equiv 0 \pmod{10}$ によって定義すると、これは同値関係であることを示せ。 (5 pts)

   (c) 前問の同値関係において、$\boldsymbol{Z}$ を類別するといくつの同値類になるか。その同値類を決定せよ。 (5 pts)

   (d) $a, b \in \boldsymbol{Z}$ としたとき、$a^2 - 10b^2$ は ± 2, ± 3 ± 7, ± 8 にはならないことを示せ。(5 pts)

Division: **ID#:** **Name:**

4. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像、$h = g \circ f : X \to Z$ $(x \mapsto g(f(x)))$、$A, B \subseteq X$ とする。正しければ示し、正しくなければ反例をあげよ。

   (a) f が全射ならば、$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. (5 pts)

   (b) h が全単射なら f は単射、g は全射。 (5 pts)

   (c) f が単射、g が全射ならば、h は全単射。 (5 pts)

   (d) f が全射、g が全射ならば、h は全射。 (5 pts)

Division: **ID#:** **Name:**

5. $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = 2x$ とし、$n = 1, 2, 3, \ldots$ について、$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - 2nf_{n-1}(x)$ とする。(多項式(高校では整式とも呼ばれる) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ において $a_n \neq 0$ のとき、n を多項式 $f(x)$ の次数といい、$\deg f(x) = n$ と書く。$\deg f_0(x) = \deg 1 = 0,\ \deg f_1(x) = \deg 2x = 1$ である。$f_2(x)$ は上の式で $n = 1$ とおくと、$f_2(x) = 2xf_1(x) - 2f_0(x) = 4x^2 - 2$ である。従って $\deg f_2(x) = 2$。)

   (a) $f_n(x)$ は n 次の多項式であることを示せ。 (5 pts)

   (b) $f_n(x)$ は $n = 2m$ のとき、偶関数 すなわち、$f_{2m}(-x) = f_{2m}(x)$ で、$n = 2m + 1$ のとき、奇関数、すなわち $f_{2m+1}(-x) = -f_{2m+1}(x)$ であることを示せ。 (5 pts)

Division: **ID#:** **Name:**

6. A, B, C を空でない集合とする。

   (a) $|A| = |B|$ であることの定義と、 $|B| \leq| C|$ であることの定義と、$|B| < |C|$ であることの定義を書け。 (5 pts)

   (b) 相異なる可算無限集合 A, B で $|A| = |B|$ となるものの例をあげ、実際に、$|A| = |B|$ となることを定義にしたがって示せ。 (5 pts)

7. 実数直線上の閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ と $[-1, 1]$ の濃度は等しいことを定義に従って示せ。 (5 pts)

Division: **ID#:** **Name:**

8. $\boldsymbol{R}$ と $[-\pi/2, \pi/2]$ の濃度が等しいことを示せ。定理を用いるときはその主張および仮定を満たしていることを確認し明記せよ。 (10 pts)

9. 一般に集合 A, B において $\mathrm{Map}(A, B)$ は A を定義域 (domain), B を終域 (codomain) とする写像 (関数, function) 全体を表すものとする。X, Y, Z を集合で $f : Y \to Z$ を単射とする。このとき、

$$F : \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(X, Z) \quad (g \mapsto f \circ g)$$

は単射であることを示せ。(すなわち F は 写像 $g : X \to Y$ に対して、写像 $f \circ g : X \to Z$ を対応する写像。) (5 pts)

Message 欄: 「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと

(1) この授業について。特に改善点について。

(2) 数学または他の分野でこれから勉強してみたいこと。

BCM I: Final 2008 Solutions *June 23, 2008*

1. P, Q, R を命題とする。このとき、真理表を完成することにより次が成立するかどうか判定せよ。 (10 pts)

$$P \Rightarrow \sim (Q \vee R) \equiv \sim ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

P	Q	R	P	$\Rightarrow$	$\sim$	$(Q$	$\vee$	$R)$	$\sim$	$((P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$(P$	$\wedge$	$R))$
T	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	T	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	$\boldsymbol{F}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{F}$	T	T	T	T	T	F	F
T	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	F	F	T	T	$\boldsymbol{F}$	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	$\boldsymbol{T}$	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	T	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	T	T	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	F	F	T
F	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	T	F	F	F	$\boldsymbol{T}$	F	F	F	F	F	F	F

等値（論理同値）かどうかの判定：真理値がすべて等しいので、等値（論理同値）である。

2. P と Q を命題とするとき $P \downarrow Q$ を下の真理表で表される真理値をもつ命題とする。

P	Q	$P \downarrow Q$	$\sim P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T

(a) $P \downarrow Q$ と等値（論理同値）な命題を $\sim$ と $\wedge$ と 括弧だけを用いて表せ。 (2 pts)

解.

$$P \downarrow Q \equiv \sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q.$$

(b) $\sim P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$ および $P \Rightarrow Q$ と等値（論理同値）な命題を $\downarrow$ （と括弧）だけを用いて表せ。$P, Q, \downarrow$ などは何度用いても良い。[Hint: まず $P \downarrow P$ の真理値を計算] (8 pts)

$\sim P \equiv P \downarrow P.$

$P \wedge Q \equiv \sim P \downarrow \sim Q \equiv (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q).$

$P \vee Q \equiv \sim (P \downarrow Q) \equiv (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q).$

$P \Rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q \equiv ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q).$

3. $\boldsymbol{Z}$ を整数の集合とし、n を自然数とする。$a, b \in \boldsymbol{Z}$ のとき、$a \equiv b \pmod n$ は $(\exists q \in \boldsymbol{Z})[b - a = nq]$ すなわち、$b - a$ が整数の範囲で n で割り切れることを表すものとする。以下において (i) $a \equiv b \pmod n$ は同値関係であること、および (ii) $a \equiv b \pmod n$, $c \equiv d \pmod n$ ならば $a + c \equiv b + d \pmod n$ であることは用いて良い。

(a) $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$ について、$a \equiv b \pmod n$, $c \equiv d \pmod n$ ならば $ac \equiv bd \pmod n$ であることを示せ。 (5 pts)

解. 仮定より $nh = b - a$, $nk = d - c$ となる整数 h, k が存在する。そこで、

$$bd - ac = bd - bc + bc - ac = b(d - c) + c(b - a) = nbk + nch = n(bk + ch).$$

ここで $bk + ch \in \boldsymbol{Z}$ だから $ac \equiv bd \pmod n$ である。 ■

(b) $a, b \in \boldsymbol{Z}$ についての関係を $3a^2 + 27b^2 \equiv 0 \pmod{10}$ によって定義すると、これは同値関係であることを示せ。 (5 pts)

解. 問題文にある性質 (i), (ii) および (a) を用いると、

$$\begin{aligned}
&3a^2 + 27b^2 \equiv 0 \pmod{10} \\
&\quad \Leftrightarrow \quad 3a^2 \equiv -27b^2 \pmod{10}, \text{ 両辺に } \pm 27b^2 \text{ を加え (ii) を用いる。} \\
&\quad \Leftrightarrow \quad 3a^2 \equiv 3b^2 \pmod{10}, \ -27b^2 \equiv 3b^3 \pmod{10} \text{ および (i) の推移律。} \\
&\quad \Leftrightarrow \quad a^2 \equiv b^2 \pmod{10}, \text{ 式の両辺に 7 または 3 をかけ (a) (i) を用いる。}
\end{aligned}$$

このことから (i) を用いれば明らかにこの関係は同値関係になる。$a^2 \equiv a^2 \pmod{10}$ は (i) の反射律、$a^2 \equiv b^2 \pmod{10}$ とすると (i) の対称律から $b^2 \equiv a^2 \pmod{10}$、$a^2 \equiv b^2 \pmod{10}$ かつ $b^2 \equiv c^2 \pmod{10}$ とすると (i) の推移律から $a^2 \equiv c^2 \pmod{10}$。したがって、$a^2 \equiv b^2 \pmod{10}$ によって定義される $\boldsymbol{Z}$ 上の関係は同値関係であり、上の考察より、$3a^2 + 27b^2 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{10}$ だったから、$3a^2 + 27b^2 \equiv 0 \pmod{10}$ によって定義される $\boldsymbol{Z}$ 上の関係も同値関係である。 ■

(c) 前問の同値関係において、$\boldsymbol{Z}$ を類別するといくつの同値類になるか。その同値類を決定せよ。 (5 pts)

解. $0^2 \equiv 0 \pmod{10}$, $1^2 \equiv 9^2 \equiv 1 \pmod{10}$, $2^2 \equiv 8^2 \equiv 4 \pmod{10}$, $3^3 \equiv 7^2 \equiv 9 \pmod{10}$, $4^2 \equiv 6^2 \equiv 6 \pmod{10}$, $5^2 \equiv 5 \pmod{10}$ であり、a^2 の値はみな異なるから、これら 6 個は別の同値類に属する。従って、同値類は、$[a] = [a]_{10} = \{a + 10m \mid m \in \boldsymbol{Z}\}$ とすると、以下の通りである。$[0]$, $[1] \cup [9]$, $[2] \cup [8]$, $[3] \cup [7]$, $[4] \cup [6]$ and $[5]$.
■

(d) $a, b \in \boldsymbol{Z}$ としたとき、$a^2 - 10b^2$ は ± 2, ± 3 ± 7, ± 8 にはならないことを示せ。(5 pts)

解. $a^2 - 10b^2 \equiv a^2 \pmod{10}$ だから $[a^2 - 10b^2] = [a^2] \in \{[0], [1], [4], [6], [5]\}$ したがって ± 2, ± 3 ± 7, ± 8 にはならない。($[2] = [-8]$, $[3] = -[7]$ に注意) ■

4. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像、$h = g \circ f : X \to Z$ $(x \mapsto g(f(x)))$、$A, B \subseteq X$ とする。正しければ示し、正しくなければ反例をあげよ。

(a) f が全射ならば、$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. (5 pts)

解. 正しくない。

$$X = \{1, 2\},\ A = \{1\},\ B = \{2\},\ Y = \{a\},\ f(1) = f(2) = a$$

とする。f は全射である。このとき、$A \cap B = \emptyset$ だから $f(A \cap B) = \emptyset$ しかし $f(A) = f(B) = \{a\}$ だから $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. ■

(b) h が全単射なら f は単射、g は全射。 (5 pts)

解. 正しい。$f(x) = f(x')$ とする。$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') = h(x')$ で h は全単射だから特に単射で、$x = x'$ となる。したがって f は単射。$z \in Z$ とすると、$h : X \to Z$ は全単射だから特に全射で、$h(x) = z$ となる $x \in X$ が存在する。ここで $h = g \circ f$ だから $y = f(x) \in Y$ とおくと、$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = h(x) = z$ である。$z \in Z$ に対して、$g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在したので、g は全射である。 ■

(c) f が単射、g が全射ならば、h は全単射。 (5 pts)

解. 正しくない。$a \neq b \neq c \neq a$ とし、$X = \{1, 2\}, Y = \{a, b, c\}, Z = \{\alpha, \beta\}$

$$f(1) = a,\ f(2) = b,\ g(a) = \alpha,\ g(b) = \alpha,\ g(c) = \beta$$

とする。明らかに、f は単射、g は全射である。しかし、$h(x) = \beta$ となる $x \in X$ は存在しないので、h は全射ではない。(ここまでで良いが、実はこの例では、$h(1) = h(2) = \alpha$ となっているので、h は単射でもない。) ■

(d) f が全射、g が全射ならば、h は全射。 (5 pts)

解. 正しい。$h : X \to Z$ だから $z \in Z$ として、$h(x) = z$ となる $x \in X$ の存在を示す。$g : Y \to Z$ は全射だから $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在する。$f : X \to Y$ も全射だったから、$x \in X$ で $f(x) = y$ となるものが存在する。ここで $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ となり、$h(x) = z$ となる $x \in X$ が常に存在するので、h は全射である。 ■

5. $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = 2x$ とし、$n = 1, 2, 3, \ldots$ について、$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - 2nf_{n-1}(x)$ とする。(多項式（高校では整式とも呼ばれる）$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ において $a_n \neq 0$ のとき、n を多項式 $f(x)$ の次数といい、$\deg f(x) = n$ と書く。$\deg f_0(x) = \deg 1 = 0,\ \deg f_1(x) = \deg 2x = 1$ である。$f_2(x)$ は上の式で $n = 1$ とおくと、$f_2(x) = 2xf_1(x) - 2f_0(x) = 4x^2 - 2$ である。従って $\deg f_2(x) = 2$。)

(a) $f_n(x)$ は n 次の多項式であることを示せ。 (5 pts)

解. 問題文にあるように $\deg f_0(x) = 0,\ \deg f_1(x) = 1$ だから $n = 0, 1$ のときは良い。帰納法の仮定により $f_n(x)$ は n 次多項式、$f_{n-1}(x)$ は $n - 1$ 次多項式である。$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - 2nf_{n-1}(x)$ だから $f_{n+1}(x)$ は多項式である。次数は $\deg 2xf_n(x) = n + 1$ で、これから、次数が $n - 1$ の $2nf_{n-1}(x)$ を引いても次数に変化はないから、$\deg f_{n+1}(x) = n + 1$ である。したがって、すべての $n = 0, 1, 2, \ldots$ に関して $f_n(x)$ の次数は n である。 ■

注. 多項式の次数 $\deg f(x)$ については、授業で解説していません。しかし、これから、大学での勉強では、すべてを習ってから使っていくわけではありませんので、このような問題も入れてみました。この次の問題にもあるように、この多項式は、物理や、化学の一部でも用いられる有名な多項式です。

(b) $f_n(x)$ は $n = 2m$ のとき、偶関数 すなわち、$f_{2m}(-x) = f_{2m}(x)$ で、$n = 2m + 1$ のとき、奇関数、すなわち $f_{2m+1}(-x) = -f_{2m+1}(x)$ であることを示せ。 (5 pts)

解. $f_0(x) = 1$ は偶関数、$f_1(x) = 2x$ は奇関数である。$n \geq 1$ とし $f_i(x)$ $i \leq n$ に関しては、成立しているとする。
$n = 2m - 1$ のとき

$$f_{2m}(x) = f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - 2nf_{n-1}(x) = 2xf_{2m-1}(x) - 2(2m-1)f_{2m-2}(x)$$

だから

$$\begin{aligned} f_{2m}(-x) &= 2(-x)f_{2m-1}(-x) - 2(2m-1)f_{2m-2}(-x) \\ &= 2xf_{2m-1}(x) - 2(2m-1)f_{2m-2}(x) = f_{2m}(x) \end{aligned}$$

となり $f_{n+1}(x) = f_{2m}(x)$ は偶関数である。
$n = 2m$ のときは、

$$f_{2m+1}(x) = f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - 2nf_{n-1}(x) = 2xf_{2m}(x) - 2(2m)f_{2m-1}(x)$$

だから

$$\begin{aligned} f_{2m+1}(-x) &= 2(-x)f_{2m}(-x) - 2(2m)f_{2m-1}(-x) \\ &= -2xf_{2m-1}(x) + 2(2m-1)f_{2m-2}(x) = -f_{2m+1}(x) \end{aligned}$$

となり $f_{n+1}(x) = f_{2m+1}(x)$ は奇関数である。 ■

注. $f_n(x)$ は エルミート多項式（Hermite polynomial of degree n）と呼ばれるもので、通常 $H_n(x)$ と書きます。たとえば $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}$ と定義されます。D は微分演算子で、一回微分することを意味します。つまり、e^{-x^2} を n 回微分すると やはり e^{-x^2} がすべてにかかっているので、それで割ったものに $(-1)^n$ をかけたものということです。$n = 0, 1, 2$ などと計算してみて下さい。すると、

$$D^{n+1}e^{-x^2} = -2xD^n e^{-x^2} - 2nD^{n-1}e^{-x^2}$$

となるので、これから、$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ がでます。$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ を確かめれば、あとは、(a) で考えたように $H_n(x)$ は n 次多項式となることが分かります。最初の定義式から考えると、$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ もわかるので、これから $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ が得られます。これより $y = H_n(x)$ とおくと、y は $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ という微分方程式を満たすことも分かります。ここまでは、ちょっと時間を使えば確かめられると思います。エルミート多項式は、次のように、ある内積空間の直交基底になっていることも分かります。

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{m,n}.$$

物理などでは定義をして、性質を仮定して進めることもよくありますが、新しいことを示そうとすると、自分で一つ一つ確認できないと、先へは進めません。また、何を仮定しているか明確にすることはより重要です。時間はかかりますが、丁寧に一つ一つ確認していってください。

6. A, B, C を空でない集合とする。

(a) $|A| = |B|$ であることの定義と、 $|B| \leq |C|$ であることの定義と、$|B| < |C|$ であることの定義を書け。 (5 pts)

解. 全単射 $f : A \to B$ が存在するとき、$|A| = |B|$ であると言う。また、単射 $g : B \to C$ が存在するとき、$|B| \leq |C|$ であると言う。$|B| \leq |C|$ であってかつ $|B| \neq |C|$ であるとき、すなわち、単射 $g : B \to C$ は存在するが、全単射 $f : B \to C$ は存在しないとき、$|B| < |C|$ と定義する。

(b) 相異なる可算無限集合 A, B で $|A| = |B|$ となるものの例をあげ、実際に、$|A| = |B|$ となることを定義にしたがって示せ。 (5 pts)

解. $A = \boldsymbol{N}$, $B = \{2n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ とする。B は偶数のみの集合なので $A \neq B$ しかし、$f : A \to B$ $(n \mapsto 2n)$ とすると、$f(n) = f(m)$ ならば $2n = 2m$ だから $n = m$ となり単射。B の定義より f は全射だから 条件を満たす。 ■

7. 実数直線上の閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ と $[-1, 1]$ の濃度は等しいことを定義に従って示せ。 (5 pts)

解.

$$f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1] \ \left(x \mapsto \frac{2x}{\pi}\right)$$

とすると、$f(x) = \frac{2x}{\pi}$ は $f'(x) = \frac{2}{\pi} > 0$ だから単調増加、したがって単射である。また、$f(x)$ は一次関数だから連続で、$f(-\pi/2) = -1$, $f(\pi/2) = 1$ だから、連続関数に関する中間値の定理により、$-1 \leq y \leq 1$ なるすべての y について $f(x) = y$ となる $-\pi/2 \leq x \leq \pi/s$ が存在する。したがって全射である。 ■

注. 区間が $[-\pi/2, \pi/2]$ と $[-1, 1]$ ですから三角関数を考えるのも良いでしょう。$f(x) = \sin x$ とすれば、$f'(x) = \cos x$ で、$f'(x)$ は $(-\pi/2, \pi/2)$ で正ですから、上と同じように議論できます。 ■

8. $\boldsymbol{R}$ と $[-\pi/2, \pi/2]$ の濃度が等しいことを示せ。定理を用いるときはその主張および仮定を満たしていることを確認し明記せよ。 (10 pts)

解.

$$g : \boldsymbol{R} \to [-\pi/2, \pi/2] \ (x \mapsto \arctan(x))$$

とすると、これは $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ となり、単射です。したがって、定義より $|\boldsymbol{R}| \leq |[-\pi/2, \pi/2]|$ である。前問の f は終域だけを変えて $[-\pi/2, \pi/2] \to \boldsymbol{R}$ なる単射だとも考えられるので、$|[-\pi/2, \pi/2]| \leq |\boldsymbol{R}|$ となる。したがって、ベルンシュタインの定理により $|\boldsymbol{R}| = |[-\pi/2, \pi/2]|$ すなわち、$\boldsymbol{R}$ と $[-\pi/2, \pi/2]$ の濃度が等しい。 ■

注. $(0, 1) \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$ ですから前に使った、$g : \boldsymbol{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ $(x \mapsto 1/(1 + e^x))$ としても単射が得られます。また $|[-\pi/2, \pi/2]| \leq |\boldsymbol{R}|$ は、$x \mapsto x$ を使っても良いですね。

9. 一般に集合 A, B において $\mathrm{Map}(A, B)$ は A を定義域 (domain), B を終域 (codomain) とする写像 (関数, function) 全体を表すものとする。X, Y, Z を集合で $f : Y \to Z$ を単射とする。このとき、

$$F : \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(X, Z) \quad (g \mapsto f \circ g)$$

は単射であることを示せ。(すなわち F は 写像 $g : X \to Y$ に対して、写像 $f \circ g : X \to Z$ を対応する写像。) (5 pts)

解. $g, g' \in \mathrm{Map}(X, Y)$ とし $F(g) = F(g')$ とする。すると、$f \circ g = f \circ g'$ だから 任意の $x \in X$ について

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (f \circ g')(x) = f(g'(x))$$

となる。ここで f は単射だったから $g(x) = g'(x)$ となる。$x \in X$ のすべてについて、$g(x) = g'(x)$ であるから $X \to Y$ なる写像として $g = g'$ である。したがって、F は単射である。 ■