BCMM I: Final 2007 Solutions

June 19, 2007

1. 「Mid で悪い点をとらないと勉強しない。」の下線を引いた二つの否定を肯定文に変えるために対偶の考え方を用いる。命題 P を「Mid で悪い点をとる」命題 Q を「勉強する」とする。上の文章は「$(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$」が真であることを言っているから、対偶は「$Q \Rightarrow P$」したがって「勉強すると Mid で悪い点をとる」。これは常識から考えて間違っている。次の問いに答えよ。

   (a) 何が間違った推論の原因かを述べよ。

   解. 原因と結果という時間的前後関係が関係することを無視して扱っている。特に「と」の中に、その意味が込められている。

   (b) 否定を取り除いた正しい命題を述べよ。

   解. 「勉強するのは Mid で悪い点を取ったからだ。」

2. 次のそれぞれの命題が真ならば証明し、偽ならば反証を与えよ。ただし、$\boldsymbol{Z}$ を整数の集合とし、$a, b \in \boldsymbol{Z}$ のとき、$a \equiv b$ は $(\exists q \in \boldsymbol{Z})[b - a = 8q]$ すなわち、$b - a$ が整数の範囲で 8 で割り切れることを表すものとする。

   (a) $\forall x \in \boldsymbol{Z}$ に対し $6x \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0$。

   解. 偽である。$x = 4$ とすると $6 \cdot 4 \equiv 0$ だが $4 \not\equiv 0$ である。

   (b) $\forall x, \forall y \in \boldsymbol{Z}$ に対して $3x^2 + 5y^2 \equiv 0 \Rightarrow x^2 \equiv y^2$。

   解. 真である。両辺に $3y^2$ を 加えると $8y^2 \equiv 0$ に注意すると、$3x^2 \equiv 3y^2$。両辺に 3 をかけると、$9 \equiv 1$ だから $x^2 \equiv y^2$ となる。

3. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像、$h = g \circ f : X \to Z$ $(x \mapsto g(f(x)))$ とする。

   (a) f と g が共に単射ならば、h は単射であることを示せ。

   解. $x_1,\ x_2 \in X$ として $h(x_1) = h(x_2)$ とする。h の定義より $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ である。ここで g は単射であるから、$f(x_1) = f(x_2)$ である。また、f も単射だから $x_1 = x_2$ である。$h(x_1) = h(x_2)$ のときはいつでも $x_1 = x_2$ が示されたので、h は単射。 ■

   (b) h が全射ならば g は全射であることを示せ。

   解. h を全射とする。$z \in Z$ に対して、$x \in X$ で $h(x) = z$ となるものが存在する。h の定義より $z = h(x) = g(f(x))$。ここで $y = f(x)$ とおくと $g(y) = z$ である。$z \in Z$ に対して $y = f(x) \in Y$ で $g(y) = z$ となるものが存在したから、g は全射である。 ■

   (c) $A \subseteq X$ とするとき一般には $f(X - A) \subseteq Y - f(A)$ は成立するとは限らない。成立しないような $X, Y, A, f : X \to Y$ の例をあげよ。

   解. $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a\}$, $A = \{2\}$, $f(1) = f(2) = a$ とする。$f(X - A) = f(\{1\}) = \{a\}$。しかし $Y - f(A) = Y - \{a\} = \emptyset$ となり、$f(X - A) \not\subseteq Y - f(A)$。
   ■

   (d) f が単射ならば、$A \subseteq X$ とするとき常に $f(X - A) \subseteq Y - f(A)$ であることを示せ。

   解. $y \in f(X - A)$ とする。$f(X - A)$ の定義より $x \in X - A$ で $y = f(x)$ となるものが存在する。$y \in Y$ は明らかだから、$y \in f(A)$ とする。すると、$a \in A$ で $f(a) = y$ となるものが存在する。よって $f(a) = f(x) = y$ である。ここで

f は単射だから、$a = x$ となる。$a \in A$ かつ $x \notin A$ だから、これは、矛盾。したがって、$f(x) = y \notin f(A)$。すなわち、$f(X - A) \subseteq Y - f(A)$。 ■

4. 集合 A 上の関係 $\sim$ が同値関係であるとする。すなわち、(i) $(\forall a \in A)[a \sim a]$, (ii) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)[a \sim b \Rightarrow b \sim a]$, (iii) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)[(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow (a \sim c)]$ を満たしているとする。$c \in A$ に対して、$[c] = \{x \in A \mid x \sim c\}$ とすると、$a, b \in A$ に対して、$b \in [a] \Rightarrow [a] = [b]$ が成立することを示せ。

   解. $[a] \subseteq [b]$ を示す。$x \in [a]$ とすると、$x \sim a$。また仮定より、$b \in [a]$ だから $b \sim a$。したがって (ii) より $a \sim b$。$x \sim a$ だったから (iii) より $x \sim b$。これは $x \in [b]$ を意味する。すなわち、$[a] \subseteq [b]$ である。

   $[b] \subseteq [a]$ を示す。$x \in [b]$ とすると、$x \sim b$。仮定より $b \sim a$ だったから (iii) より $x \sim a$。したがって $x \in [a]$。すなわち、$[b] \subseteq [a]$ である。

   したがって $[a] = [b]$ である。 ■

5. α を実数とし $a_{n+2} = 2\alpha a_{n+1} - \alpha^2 a_n$ を満たす数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ の一般項 a_n は、$a_n = \alpha^{n-1}(na_1 - (n-1)\alpha a_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で与えられることを示せ。

   解. 数学的帰納法で示す。$n = 1$ のとき一般項を表す式は、$a_1 = a_1$ となるので、成立する。$n = 2$ のときも、$2\alpha a_1 - \alpha^2 a_0 = a_2$ だから、成立する。ここで、$n \geq 1$ のとき $m = 1, 2, \ldots, n, n+1$ について a_m をあらわす式が成立するとする。

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} &= 2\alpha a_{n+1} - \alpha^2 a_n \\
&= 2\alpha \cdot \alpha^n((n+1)a_1 - n\alpha a_0) - \alpha^2 \cdot \alpha^{n-1}(na_1 - (n-1)\alpha a_0) \\
&= \alpha^{n+1}((2(n+1) - n)a_1 - \alpha(2n - n + 1)a_0) \\
&= \alpha^{n+1}((n+2)a_1 - \alpha(n+1)a_0).
\end{aligned}
$$

   したがって $n + 2$ の時にも成立するので、数学的帰納法のより、すべての自然数について、成立する。 ■

6. A, B, C を空でない集合とする。

   (a) $|A| = |B|$ であることの定義と、$|B| \leq |C|$ であることの定義と、$|B| < |C|$ であることの定義を書け。

   解. $f : A \to B$ 全単射が存在するとき、$|A| = |B|$ である。$f : B \to C$ 単射が存在するとき、$|B| \leq |C|$ である。$|B| \leq |C|$ かつ $|B| \neq |C|$ であるとき、すなわち、$f : B \to C$ なる単射は存在するが、$g : B \to C$ なる全単射は存在しないとき $|B| < |C|$ である。

   (b) $|A| = |B|$ かつ $|A| \leq |C|$ ならば $|B| \leq |C|$ であることを定義に従って示せ。

   解. $|A| = |B|$ かつ $|A| \leq |C|$ だから $f : A \to B$ なる全単射と、$g : A \to C$ なる単射が存在する。f は全単射だから逆写像、$f^{-1} : B \to A$ も存在し、これも全単射である。特に、単射である。すると、問題 3(a) より合成関数 $g \circ f^{-1} : B \to C$ は単射である。したがって定義より、$|B| \leq |C|$ である。 ■

7. 実数直線上の閉区間 $[0, 1]$ と 開区間 $(0, 1)$ の濃度は等しいことを示せ。定理を用いるときは定理の主張も同時に記すこと。

   $f : (0, 1) \to [0, 1]$ $(x \mapsto x)$ は単射である。したがって $|(0, 1)| \leq |[0, 1]|$。また、$g : [0, 1] \to (0, 1)$ $(x \mapsto \frac{1}{3}(x + 1))$ は単射である。$g([0, 1]) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \subseteq (0, 1)$。したがっ

て、$|[0,1]| \leq |(0,1)|$ である。Cantor-Bernstein の定理により、$[0,1]$ と $(0,1)$ の濃度は等しい。 ■

8. $\boldsymbol{N}$ を自然数の集合とするとき、$|\boldsymbol{N}| < |S|$ となる集合 S が存在することを示せ。

   解. 一般に、A を集合としたとき、$|A| < |P(A)|$。したがって、$S = P(\boldsymbol{N})$ とすればよい。以下に、$|A| < |P(A)|$ を示す。$\psi : A \to P(A)$ $(a \mapsto \{a\})$ は単射だから、$|A| \leq |P(A)|$。φ を A から $P(A)$ への写像とする。各 $a \in A$ に対して、$\varphi(a) \subseteq A$ である。ここで、$B = \{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\}$ とおく。$B \subseteq A$ である。$\varphi(a) = B$ と仮定する。$a \in \varphi(a)$ とすると、B の定義より $a \notin B$ となり、$\varphi(a) = B$ に矛盾する。一方、$a \notin \varphi(a)$ とすると、B の定義より $a \in B$ であるが、これも、$\varphi(a) = B$ に矛盾する。したがって、$\varphi(a) = B$ となる $a \in A$ は存在しない。特に、A から $P(A)$ への全単射は存在しない。したがって $|A| < |P(A)|$ である。 ■

9. X と Y を集合で $X \cap Y = \emptyset$ となるものとする。このとき、

   $$f : P(X \cup Y) \to P(X) \times P(Y)\ (Z \mapsto (X \cap Z, Y \cap Z))$$

   は全単射であることを示せ。

   解. $g : P(X) \times P(Y) \to P(X \cup Y)\ ((A, B) \mapsto A \cup B)$ とすると、

   $$g \circ f(Z) = g(f(Z)) = g(X \cap Z, Y \cap Z) = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z = Z.$$

   したがって、$g \circ f = id_{P(X) \times P(Y)}$。特に、$f$ は単射。また、

   $$\begin{aligned} f \circ g(A, B) &= f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap X, (A \cup B) \cap Y) \\ &= ((A \cap X) \cup (B \cap X), (A \cap Y) \cup (B \cap Y)) = (A, B). \end{aligned}$$

   したがって、$f \circ g = id_{P(X \cup Y)}$ である。問題 3(b)、特に f は全射で、f は全単射。■

Grading Policy: Take-Home Quiz (20%) （9回実施)、演習 (Recitation) (10%) （8回分割り当てました)、宿題 (Homework) (10%) ： （11単元から、各3問以上の提出を求めました)、中間試験 (Mid-Term) (20%) ：(5/15 (Tu) の7時限目に実施)、期末試験 (Final) (40%) （6月19日に実施)

Final および提出物は土曜日には返却できると思います。NetCommons に書きます。(6/28-30, 7/11-14 は不在予定) 9/1 以降は研究室前の椅子の上に置いておきます。

専門の数学の最初のコースはどうでしたか。楽しめましたか。お疲れ様。

夏やすみのお薦めは、以下の通りです。

1. 数学通論 III の参考書となっている「集合と位相」内田伏一著、裳華房 の前半が集合論です。
2. 数学通論 II に関係する、高木貞治「解析概論」を最初からじっくり読むのがお薦め。
3. 線型代数 III を履修した人も多いと思います。佐武一郎著「線型代数入門」を最初からじっくり読むのもお薦め。
4. もう少し簡単に取り組めそうなのは、「集合への 30 講」志賀浩二著　朝倉書店。
5. 公理的集合論入門をかじってみたい人には、「新装版：集合とはなにか (はじめて学ぶ人のために)」竹内外史著、講談社。

夏休みにじっくり一冊、数学の本を読むことに時間をかけることができれば、たとえ、読む量は少なくても、大きな価値があると思いますよ。

鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)