BCMM I : Final 2006

June 22, 2006

ID#: **Name:**

1. 次のそれぞれの命題が真ならば証明し、偽ならばその命題の否定を書きそれを証明せよ。ただし、$A = \boldsymbol{R} \setminus \{-1\} = \{x \mid (x \in \boldsymbol{R}) \wedge (x \neq -1)\}$。

   (a) $(\forall x \in A)(\exists y \in A)[xy + x + y = 0]$.

   (b) $(\exists x \in A)(\forall y \in A)[xy + x + y = 0]$.

2. 集合 A, B, C について、次を Venn 図を使わずに証明せよ。

$$(A \cap B) \cup C = A \cup C \Leftrightarrow A \cup C \subseteq B \cup C.$$

3. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像、$h = g \circ f : X \to Z$ $(x \mapsto g(f(x)))$ とする。

(a) f と g が共に全射ならば、h は全射であることを示せ。

(b) h が単射ならば f は単射で、かつ $g_{|f(X)}$ (g の定義域を $f(X)$ に制限したもの) も単射であることを示せ。

(c) $A \subseteq X$ とするとき $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ であることを示せ。

(d) h が単射ならば、$A \subseteq X$ に対して常に $f^{-1}(f(A)) = A$ であることを示せ。

4. 集合 A 上の関係 $\sim$ が同値関係であるとする。すなわち、(i) $(\forall a \in A)[a \sim a]$, (ii) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)[a \sim b \Rightarrow b \sim a]$, (iii) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)[(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow (a \sim c)]$ を満たしているとする。$c \in \boldsymbol{Z}$ に対して、$[c] = \{x \mid (x \in A) \wedge (c \sim x)\}$ とすると、次が成立することを証明せよ。

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)[[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]].$$

5. $\boldsymbol{Q}^+$ は正の有理数全体の集合を表すものとする。

   (a) $|\boldsymbol{Q}^+| \leq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}|$ であることを示せ。

   (b) $|\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{N}|$ であることと、Cantor-Bernstein の定理を用いて $|\boldsymbol{Q}^+| = |\boldsymbol{N}|$ であることを示せ。

6. 実数直線上の閉区間 $[0, 1]$ と $\boldsymbol{R}$ の濃度は等しいことを示せ。

7. A, B, C, D を集合とする。

   (a) $|A| = |C|$ かつ $|B| = |D|$ ならば $|A \times B| = |C \times D|$ であることを示せ。

   (b) $|A| = |C|$ かつ $|A \times B| = |C \times D|$ であっても、$|B| = |D|$ とは限らないことを示せ。

8. $m, n \in \boldsymbol{Z}$ のとき、$\langle m, n\rangle = \{mx + ny \mid x, y \in \boldsymbol{Z}\}$ とする。

(a) $\langle 21, 56\rangle = \{7z \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$ であることを示せ。

(b) $d = \gcd\{m, n\}$ とすると、$\langle m, n\rangle = \{dz \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$ であることを示せ。

(c) $\phi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_3 \times \boldsymbol{Z}_8 \; (x \mapsto ([x]_3, [x]_8))$ は全射であることを示せ。

Message 欄: 「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと

(1) この授業について。特に改善点について。

(2) ICU の教育一般について。特に改善点について。

BCMM I: Final 2006 Solutions

June 22, 2006

1. 次のそれぞれの命題が真ならば証明し、偽ならばその命題の否定を書きそれを証明せよ。ただし、$A = \boldsymbol{R} \setminus \{-1\} = \{x \mid (x \in \boldsymbol{R}) \wedge (x \neq -1)\}$。 (5pts x 2 = 10 pts)

   (a) $(\forall x \in A)(\exists y \in A)[xy + x + y = 0]$.
   解. $x \neq -1$ のとき $y = -x/(x+1)$ とする。$x \neq -1$ だから $y \in \boldsymbol{R}$。かつ、$y = -1$ とすると、$x = x + 1$ となって矛盾。従って、$y \in A$ かつ、

   $$x \cdot \frac{-x}{x+1} + x + \frac{-x}{x+1} = \frac{-x^2 + x^2 + x - x}{x+1} = 0.$$

   従って真である。 ■

   (b) $(\exists x \in A)(\forall y \in A)[xy + x + y = 0]$.
   解. 条件を満たす $x \in A$ が存在したとする。$y = 0 \in A$ とすると $x = 0$ とならなければならないが、$x = 0, y = 1 \in A$ とすると、$xy + x + y \neq 0$。従って真ではない。この否定は

   $$\neg(\exists x \in A)(\forall y \in A)[xy + x + y = 0] = (\forall x \in A)(\exists y \in A)[xy + x + y \neq 0].$$

   $x \neq 0$ のときは、$y = 0$、$x = 0$ のときは、$y = 1$ とすれば いずれの場合も $xy+x+y \neq 0$ であるのでこの命題は真である。 ■

2. 集合 A, B, C について、次を Venn 図を使わずに証明せよ。 (10 pts)

   $$(A \cap B) \cup C = A \cup C \Leftrightarrow A \cup C \subseteq B \cup C.$$

   解. まず、$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ である。
   $\Rightarrow$: $A \cup C = (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq B \cup C$. ■
   $\Leftarrow$: $A \cup C \subseteq B \cup C$ とする。$A \cup C \subseteq A \cup C$ だから

   $$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq A \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

   となり、$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = A \cup C$ となる。 ■

3. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像、$h = g \circ f : X \to Z$ $(x \mapsto g(f(x)))$ とする。
   (5pts x 4 = 20 pts)

   (a) f と g が共に全射ならば、h は全射であることを示せ。
   解. $z \in Z$ に対して、$x \in X$ で $h(x) = z$ となるものが常に存在する事を示す。
   まず $g : Y \to Z$ が全射だから、$g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在する。$f : X \to Y$ が全射だから、その y に対して、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。従って、$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ となり、主張が得られた。 ■

   (b) h が単射ならば f は単射で、かつ $g_{|f(X)}$ (g の定義域を $f(X)$ に制限したもの) も単射であることを示せ。
   解. まず $f : X \to Y$ が単射であることを示す。$f(x) = f(x')$ $(x, x' \in X)$ とする。すると $h(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = h(x)$ となる。ここで、$h : X \to Z$ は仮定から単射だから、$h(x) = h(x')$ より $x = x'$ を得る。従って、$f : X \to Y$ は単射である。 ■
   次に $g_{|f(X)} : f(X) \to Z$ が単射であることを示す。$g_{|f(X)}(y) = g_{|f(X)}(y')$ $(y, y' \in f(X))$ とする。$y, y \in f(X)$ だから $y = f(x)$, $y' = f(x')$ となる $x, x' \in X$ が存在する。すると、$h(x) = g(f(x)) = g(y) = g_{|f(X)}(y) = g_{|f(X)}(y') = g(y') = g(f(x')) = h(x')$. ここで、$h : X \to Z$ は単射だから $x = x'$ を得る。従って $y = f(x) = f(x') = y'$ となる。$g_{|f(X)}(y) = g_{|f(X)}(y')$ $(y, y' \in f(X))$ から $y = y'$ が得られたから、$g_{|f(X)} : f(X) \to Z$ は単射であることが示された。 ■

(c) $A \subseteq X$ とするとき $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ であることを示せ。

解. $a \in A$ とする。$f(a) \in f(A)$ だから $a \in f^{-1}(f(A)) = \{x \mid (x \in X) \wedge (f(x) \in f(A))\}$. 従って、$A \subseteq f^{-1}(f(A))$ が示された。 ■

(d) h が単射ならば、$A \subseteq X$ に対して常に $f^{-1}(f(A)) = A$ であることを示せ。

解. 一般的に $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ が (c) で示されているので、$f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ を示せばよい。$x \in f^{-1}(f(A))$ とする。$f^{-1}(f(A))$ の定義より $f(x) \in f(A)$。従って $a \in A \subseteq X$ で $f(x) = f(a)$ となるものが存在する。仮定より $h : X \to Z$ は単射である。しかし、(b) により $f : X \to Y$ は単射である。従って、$f(x) = f(a)$, $x, a \in X$ より $x = a \in A$ となる。従って、$f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ である。これから、最初に述べたように、$f^{-1}(f(A)) = A$ を得る。 ■

4. 集合 A 上の関係 $\sim$ が同値関係であるとする。すなわち、(i) $(\forall a \in A)[a \sim a]$, (ii) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)[a \sim b \Rightarrow b \sim a]$, (iii) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)[(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow (a \sim c)]$ を満たしているとする。$c \in \boldsymbol{Z}$ に対して、$[c] = \{x \mid (x \in A) \wedge (c \sim x)\}$ とすると、次が成立することを証明せよ。 (10 pts)

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)[[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]].$$

解. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ だから $\exists c \in [a] \cap [b]$ である。これより $c \in [a]$ かつ $c \in [b]$ である。a, b は任意だから $c \in [a] \Rightarrow [c] = [a]$ を示せば、$[c] = [b]$ も成立し $[a] = [c] = [b]$ となるので、$c \in [a] \Rightarrow [c] = [a]$ を示せばよい。まず $c \in [a]$ と $[a]$ の定義より $a \sim c$、また (ii) より $c \sim a$ も成立する。$x \in [c]$ とすると、定義より $c \sim x$。従って (iii) より $a \sim x$。これは、$x \in [a]$ を意味する。$x \in [c]$ は任意だから、$[c] \subseteq [a]$。次に $x \in [a]$ とする。$[a]$ の定義より $a \sim x$。$c \sim a$ だったから (iii) より $c \sim x$ となり $x \in [c]$ が示された。$x \in [a]$ は任意だったから $[a] \subseteq [c]$ となる。従って、$[c] = [a]$ を得、上に述べたことより $[a] = [b]$ が成立する。■

5. $\boldsymbol{Q}^+$ は正の有理数全体の集合を表すものとする。 (5pts x 2 = 10 pts)

(a) $|\boldsymbol{Q}^+| \leq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}|$ であることを示せ。

解. $x \in \boldsymbol{Q}^+$ とする。すると $x = n(x)/d(x), n(x), d(x) \in \boldsymbol{N}$ かつ $\gcd\{n(x), d(x)\} = 1$ と一通りに書くことができる。従って、$f : \boldsymbol{Q}^+ \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ $(x \mapsto (n(x), d(x))$ と定義すると、f は写像である。($n(x)$ は numerator (分子) から取ったもので、$d(x)$ は denominator (分母) から名前を付けたものです。最大公約数を 1 にしておけば、一通りにかけます。$x = n/d = n'/d'$ とすると、$nd' = n'd$ となり、$d \mid nd'$ かつ $\gcd\{d, n\} = 1$ より $d \mid d'$。同様に $d' \mid d$ となり、これより $d = d'$ となります。すると、$n = n'$ も得られます。) さて、$g : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Q}^+$ $((n, d) \mapsto n/d))$ とすると、$g \circ f = id_{\boldsymbol{Q}^+}$ を得ます。$id_{\boldsymbol{Q}^+}$ は単射だから、f は単射。従って、$|\boldsymbol{Q}^+| \leq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}|$ である。 ■

(b) $|\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{N}|$ であることと、Cantor-Bernstein の定理を用いて $|\boldsymbol{Q}^+| = |\boldsymbol{N}|$ であることを示せ。

解. $h : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Q}^+$ $(x \mapsto x)$ とするとこれは、単射だから、$|\boldsymbol{N}| \leq |\boldsymbol{Q}^+|$。従って、(a) と、$|\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{N}|$ を用いると、

$$|\boldsymbol{N}| \leq |\boldsymbol{Q}^+| \leq |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{N}|.$$

従って、Cantor-Bernstein の定理より $|\boldsymbol{Q}^+| = |\boldsymbol{N}|$ を得る。 ■

6. 実数直線上の閉区間 $[0, 1]$ と $\boldsymbol{R}$ の濃度は等しいことを示せ。 (10 pts)

解. $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ $(x \mapsto x)$ は単射だから、$|[0, 1]| \leq |\boldsymbol{R}|$。

$$g : \boldsymbol{R} \to [0, 1]\ (x \mapsto \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2})$$

とする。$g'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} > 0$ だから、g は単調増加だから、g は単射。従って、$|\boldsymbol{R}| \le |[0,1]|$ である。Cantor-Bernstein の定理によって、実数直線上の閉区間 $[0,1]$ と $\boldsymbol{R}$ の濃度は等しいことが分かった。 ■

7. A, B, C, D を集合とする。 (5pts x 2 = 10 pts)

   (a) $|A| = |C|$ かつ $|B| = |D|$ ならば $|A \times B| = |C \times D|$ であることを示せ。
   解. 仮定より、$f : A \to C$, $g : B \to D$ 二つの全単射が存在する。そこで、
   $$h : A \times B \to C \times D \, ((a,b) \mapsto (f(a), g(b)))$$
   とする。これは、全単射であることを示せばよい。
   まず、$c \in C, d \in D$ とすると、$f : A \to C, g : B \to D$ が全射であることより、$f(a) = c$, $g(b) = d$ となる $a \in A$, $b \in B$ が存在する。すると、$h(a,b) = (f(a), g(b)) = (c,d)$。$c \in C$, $d \in D$ は任意だから h は全射である。
   $h(a,b) = h(a',b')$, $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ とする。$(f(a), g(b)) = h(a,b) = h(a',b') = (f(a'), g(b'))$ より $f(a) = f(a')$ かつ $g(b) = g(b')$ を得る。f, g は共に単射だから、$a = a'$ かつ $b = b'$ を得る。従って、$(a,b) = (a',b')$。これは、h が単射であることを示す。
   したがって、$h : A \times B \to C \times D$ は全単射で、$|A \times B| = |C \times D|$ を得る。 ■

   (b) $|A| = |C|$ かつ $|A \times B| = |C \times D|$ であっても、$|B| = |D|$ とは限らないことを示せ。
   解. $A = C = D = \boldsymbol{N}$, $B = \{1\}$ とすると、$|A| = |C|$。また、$f : \boldsymbol{N} \times \{1\} \to \boldsymbol{N} \, ((n,1) \mapsto n)$ は、全単射だから、$|A \times B| = |\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}| = |C \times D|$。($|\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{N}|$ を用いた。)したがって、条件を満たすが、$B = \{1\}$ から $D = \boldsymbol{N}$ に全単射は存在しない。 ■

8. $m, n \in \boldsymbol{Z}$ のとき、$\langle m, n \rangle = \{mx + ny \mid x, y \in \boldsymbol{Z}\}$ とする。 (6 pts + 7 pts x 2 = 20 pts)

   (a) $\langle 21, 56 \rangle = \{7z \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$ であるこことを示せ。
   解. $w \in \langle 21, 56 \rangle$ とすると、$w = 21x + 56y = 7(3x + 8y)$ である、従って、$z = 3x + 8y$ とすると、$w \in \{7z \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$ であることが分かる。w は任意だから、$\langle 21, 56 \rangle \subseteq \{7z \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$。逆に $w = 7z, z \in \boldsymbol{Z}$ とすると、$3 \cdot 3 + 8(-1) = 1$ だから、$w = (3 \cdot 3 + 8(-1))7z = 21 \cdot 3z + 56 \cdot (-z) \in \langle 21, 56 \rangle$ 従って、$\langle 21, 56 \rangle \supseteq \{7z \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$。上で示したこととあわせると、$\langle 21, 56 \rangle = \{7z \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$ であることが示せた。 ■

   (b) $d = \gcd\{m, n\}$ とすると、$\langle m, n \rangle = \{dz \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$ であるこことを示せ。
   $m = dm'$, $n = dn'$ となる $m', n' \in \boldsymbol{Z}$ が存在する。$w \in \langle m, n \rangle$ とすると、$w = mx + ny = d(m'x + n'y)$ である、従って、$z = m'x + n'y$ とすると、$w \in \{dz \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$ であることが分かる。w は任意だから、$\langle m, n \rangle \subseteq \{dz \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$。逆に $w = dz$, $z \in \boldsymbol{Z}$ とする。d は最大公約数だから、$d = mx + ny$ となる $x, y \in \boldsymbol{Z}$ が存在する。$w = dz = (mx + ny)z = m \cdot xz + n \cdot yz \in \langle m, n \rangle$。 従って、$\langle m, n \rangle \supseteq \{dz \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$。上で示したこととあわせると、$\langle m, n \rangle = \{dz \mid z \in \boldsymbol{Z}\}$ であることが示せた。 ■

   (c) $\phi : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_3 \times \boldsymbol{Z}_8 \, (x \mapsto ([x]_3, [x]_8))$ は全射であることを示せ。
   解. $3 \cdot 3 + 8(-1) = 1$ だから $a, b \in \boldsymbol{Z}$ とする。$x = 9b - 8a$ とすると、$[x]_3 = [-8a]_3 = [a]_3$ かつ $[x]_8 = [9b]_8 = [b]_8$。これは、$\phi(x) = ([a]_3, [b]_8)$ で $a, b \in \boldsymbol{Z}$ は任意だったから、ϕ は全射である。 ■

Grade: Quiz 20% + Mid 20% + Final 40% + Recitation 20% (演習は解いた問題、提出したもの (18%) にほんの少し (2%) Mini Test 1 回, Comment Sheet 提出回数（6 回）を加えます。)

Final および提出物は土曜日以降取りに来れば返却します。(6/26-29, 7/10-14 は不在) 9/1 以降は研究室前の椅子の上に置いておきます。

専門の数学の最初のコースはどうでしたか。楽しめましたか。お疲れ様。

鈴木寛 (*hsuzuki@icu.ac.jp*)