BCMM I 2005: Final

June 20, 2005

ID#: **Name:**

1. P, Q, R を命題とする。Let P, Q and R be propositions.

   (a) $P \Rightarrow (\neg Q)$ の真理表を作れ。Make the truth value table of $P \Rightarrow (\neg Q)$.

   (b) $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ は成立するか。真理表を作って判定せよ。Determine whether $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ holds or not by making truth value tables.

2. A, B, C を集合とする。Let A, B and C be sets.

   (a) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$ をベン図を用いずに証明せよ。Prove $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$ without using Venn diagrams.

   (b) $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$ となる A, B, C の例をあげよ。Give an example of A, B, C respectively such that $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.

3. f を集合 X から集合 Y への写像、A, A' を X の部分集合とする。Let f be a mapping from X to Y and $A, A' \subseteq X$.

   (a) $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ を示せ。Prove $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$.

   (b) $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$ となる f, X, Y, A, A' の例をあげよ。Give an example of f, X, Y, A, A' respectively such that $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$.

4. f を集合 X から集合 Y への写像、g を集合 Y から集合 Z への写像とする。h を X から Z への写像で $x \in X$ に対して $h(x) = g(f(x))$ と定義したものとする。このとき、以下が成立すれば証明し、つねには成立しない時は反例をあげよ。Let f be a mapping from X to Y, and g a mapping from Y to Z. Define a mapping h from X to Z by $h(x) = g(f(x))$ for $x \in X$. If the following holds, prove it. Otherwise, give a counter example.

   (a) f および g が単射ならば、h も単射である。If f and g are injective, so is h.

   (b) h が単射ならば f は単射である。If h is injective, so is f.

   (c) h が単射ならば g は単射である。If h is injective, so is g.

5. X, Y を集合とする。 Let X, Y be sets.

   (a) $|X| = |Y|$ の定義を述べよ。Give the definition of $|X| = |Y|$.

   (b) $|X| \leq |Y|$ の定義を述べよ。Give the definition of $|X| \leq |Y|$.

   (c) $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ を自然数全体、$\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とする。$|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{Z}|$ を証明せよ。 Let $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ be the set of natural numbers and $\boldsymbol{Z}$ the set of integers. Prove $|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{Z}|$.

6. $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とする。$a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対して、

$$(a, b) = \{x \mid (x \in \boldsymbol{R}) \wedge (a < x < b)\},$$

$$[a, b] = \{x \mid (x \in \boldsymbol{R}) \wedge (a \leq x \leq b)\},$$

$$[a, b) = \{x \mid (x \in \boldsymbol{R}) \wedge (a \leq x < b)\}$$

と定義する。

(a) $|(0, 1)| = |(-1, 2)|$ を定義に従って証明せよ。

(b) $|(0, 1)| \leq |[0, 1]|$ を定義に従って証明せよ。

(c) $|[0, 1)| = |(0, 1)|$ をベルンシュタイン (Bernstein) の定理を用いて証明せよ。

7. $X = \{1, 2, 3\}$ とする。$P(X)$ を X のベキ集合（X の部分集合全体の集合）とする。
Let $X = \{1, 2, 3\}$. Let $P(X)$ be the power set of X (the set of all subsets of X).

(a) $P(X)$ の元をすべてあげよ。Find all elements of $P(X)$.

(b) $\mathrm{Map}(X, \{0, 1\})$ を集合 X から集合 $\{0, 1\}$ への写像全体の集合とする。$\mathrm{Map}(X, \{0, 1\})$ の元をすべてあげよ。Let $\mathrm{Map}(X, \{0, 1\})$ be the set of all mappings from X to $\{0, 1\}$. Find all elements of $\mathrm{Map}(X, \{0, 1\})$.

8. $a, b \in \boldsymbol{Z}$ とする。$a \mid b$ を $(\exists c \in \boldsymbol{Z})[b = ac]$ により定義する。Let $a, b \in \boldsymbol{Z}$. Define $a \mid b$ by $(\exists c \in \boldsymbol{Z})[b = ac]$.

(a) $a, b \geq 0$ とする。$a \mid b$ かつ $b \mid a$ ならば $a = b$ であることを証明せよ。(「割りきる」「割り切られる」などの言葉は使わず $a \mid b$ や $b \mid a$ の定義に従って示すこと。) Let $a, b \geq 0$. Prove that if $a \mid b$ and $b \mid a$, then $a = b$. (Do not use the words such as "divide" or "divisible." Follow the definition of $a \mid b$ and $b \mid a$.)

(b) a, b の最大公約数 (greatest common divisor) とは次の三つの性質を満たす整数 d のことである：

(i) $d \geq 0$.

(ii) $(d \mid a) \wedge (d \mid b)$.

(iii) $(\forall c \in \boldsymbol{Z})[(c \mid a) \wedge (c \mid b) \Rightarrow c \mid d]$.

a, b の最大公約数が一意的であることを上の最大公約数の定義に従って証明せよ。Prove that the greatest common divisor of a and b is unique following the above definition.

Message： (掲載不可の場合はその旨を明記すること) (1) この授業について。特に改善点について。(2) ICU の教育一般について。特に改善点について。