Final 2004

June 22, 2004

Division: **ID#:** **Name:**

いくつかの定義：

- 一般に命題 P、Q に対して、$P \oplus Q = (P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge Q))$ と定義する。
- 一般に集合 X の部分集合全体を $P(X)$ で表す。空集合を $\emptyset$ で表すと、$\emptyset \in P(X)$ である。$A, B \in P(X)$ に対して $A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ とする。$A \times B \subset X \times X$ である。

復習： 以下は言葉の定義を確認するためのものであり、定義として書いているものではありません。

- $\boldsymbol{N}$ は自然数全体の集合、$\boldsymbol{Z}$ は整数全体の集合、$\boldsymbol{R}$ は実数全体の集合を表す。
- 集合 A の濃度（基数）を $|A|$ で表す。
- 演算 $\circ$ が定義された集合 A は $\circ$ に関して結合法則が成り立ち、単位元を持ち、A の各元に逆元が存在する時、$(A, \circ)$ は群をなすという。
- 演算 $+$ と $\cdot$ が定義された集合 R が、$+$ に関して可換群となり、$\cdot$ に関しては結合法則を満たし、単位元をもち、左右分配法則を持つとする。さらに、$+$ に関する単位元と $\cdot$ に関する単位元が相異なる時、$(R, +, \cdot)$ を単位元を持つ環という。

1. (a) P, Q を命題とするとき、$P \oplus Q$ の真理表を作れ。(答のみ)

   (b) P, Q, R を命題とするとき、次の式が成立するかどうか決定せよ。

$$(P \oplus Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \oplus (Q \wedge R)$$

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

P	Q	R	$(P \oplus Q) \wedge R$	$(P \wedge R) \oplus (Q \wedge R)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

Division: **ID#:** **Name:**

2. X を集合 A, B, C, D をその部分集合とする。このとき次のそれぞれの式が常に成立すれば証明し、常には成り立たない場合は反例（成り立たない例）を書け。その場合は成り立たないことも説明すること。

   (a) $(A \times B) \setminus (C \times D) \subset ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

   (b) $(A \times B) \setminus (C \times D) \supset ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

3. f を集合 X から集合 Y への写像。A を X の部分集合、B を Y の部分集合とする。このとき次のそれぞれの式が常に成立すれば証明し、常には成り立たない場合は反例（成り立たない例）を書け。その場合は成り立たないことも説明すること。

   (a) $f^{-1}(B \cup f(A)) \subset f^{-1}(B) \cup A$

   (b) $f^{-1}(B \cup f(A)) \supset f^{-1}(B) \cup A$

Division: **ID#:** **Name:**

4. f を集合 X から集合 Y への写像、g を集合 Y から 集合 Z への写像とする。h を X から Z の写像で $x \in X$ に対して $h(x) = g(f(x))$ と定義したものとする。このとき、以下が成立すれば証明し、つねには成立しない時は反例をあげよ。

    (a) f および g が単射ならば、h も単射である。

    (b) h が単射ならば f は単射である。

    (c) h が単射ならば g は単射である。

5. X を集合とするとき、X から $P(X)$ への全射は存在しないことを背理法で証明するため、$f : X \to P(X)$ なる全射があるとする。$A = \{a \in X \mid a \notin f(a)\}$ とすると $A \in P(X)$ であるが、$f(x) = A$ となる $x \in X$ は存在しないことを丁寧に説明せよ。

Division: **ID#:** **Name:**

6. 集合の濃度に関する以下の問いに答えよ。

(a) 一般に集合 A, B について $|A| = |B|$ であることの定義をのべよ。また、高々可算な集合とはどのような集合を意味するか述べよ。

(b) $A = B \cup C$ かつ $B \cap C = \emptyset$ で $|B| = |\boldsymbol{N}|$ かつ C が高々可算な集合ならば $|A| = |\boldsymbol{N}|$ であることを証明せよ。

(c) $A = B \cup C$ かつ $B \cap C = \emptyset$ で $\boldsymbol{N} \subset B$ かつ C が高々可算な集合ならば $|A| = |B|$ であることを証明せよ。

(d) $|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{Z}|$ を証明せよ。

Division: **ID#:** **Name:**

7. (a) 一般に集合 A, B において $|A| \le |B|$ であることの定義をのべ、$|\boldsymbol{R}| \le |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R}|$ であることを証明せよ。

   (b) $|\boldsymbol{R}| \ge |\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R}|$ であることを証明せよ。

8. $(R, +, \cdot)$ を単位元をもつ環とする。また、加法 $+$ に関する単位元を 0 で、乗法 $\cdot$ に関する単位元を 1 で表すとする。$a \in R$ のとき a の加法 $+$ に関する逆元を $-a$ で表すものとする。このとき、以下を証明せよ。式の変形におていは、理由も述べること。

   (a) すべての $a \in R$ に対して $a \cdot 0 = 0$。

   (b) すべての $a \in R$ に対して $(-1) \cdot a = -a$。

Division: **ID#:** **Name:**

9. $a, b \in \boldsymbol{N}$ とする。

   (a) a, b の最小公倍数の定義を書け。以下 a, b の最小公倍数を $a \circ b$ で表すことにする。次の命題が真かどうか判定せよ。

   $$(\exists e \in \boldsymbol{N})(\forall a \in \boldsymbol{N})[e \circ a = a \circ e = a]$$

   (b) $(\boldsymbol{N}, \circ)$ は結合法則を満たすか、単位元はあるか、各元に対して逆元があるかを判定せよ。

Message 欄: 「ホームページ掲載不可」の場合は明記のこと

(1) この授業について。特に改善点について。

(2) ICU の教育一般について。特に改善点について。